

ANALIZA MATEMATICA

D₁: Fie I un interval și $f: I \rightarrow \mathbf{R}$. Funcția F se numește primitivă a lui f dacă:

- 1) F este derivabilă;
 - 2) $F'(x) = f(x), \forall x \in I$
- Fie I un interval și funcția $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ care admite primitive. Dacă $F_1, F_2: I \rightarrow \mathbf{R}$ sunt primitive ale funcției f , atunci $F_1(x) = F_2(x) + c, \forall x \in I, c \in \mathbf{R}$
 - $\int f(x) dx = \{F : I \rightarrow \mathbf{R} \mid F \text{ primitivă a funcției } f\}$ - integrala nedefinită a funcției f
 - O funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval
 - Derivata oricărei funcții derivabile pe un interval I are proprietatea lui Darboux pe I
 - Dacă $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ admite primitive pe intervalul I , atunci f are proprietatea lui Darboux pe I
 - Fie $f: I \rightarrow \mathbf{R}$. Dacă imaginea funcției pe un subinterval $J \subset I$ nu este interval, atunci f nu admite primitive pe I
 - O funcție cu puncte de discontinuitate de speța I nu admite primitive deoarece nu are proprietatea lui Darboux

Formula de integrare prin părți.

Fie $f, g: I \rightarrow \mathbf{R}$ funcții derivabile cu derivatele continue. Aunci funcțiile $f' \cdot g$ și $f \cdot g'$ admit primitive și

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Teorema de schimbare de variabilă:

Fie $I, J \subset \mathbf{R}$ intervale, $\varphi : I \rightarrow J$ și $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ funcții cu proprietățile:

- φ este derivabilă pe I
- f admite primitivă F pe J

Atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitivă $F \circ \varphi$ pe I .

Dacă φ este o funcție derivabilă pe un interval, atunci:

- 1) $\int \varphi^a(x) \cdot \varphi'(x) dx = \frac{\varphi^{a+1}}{a+1} + C$
- 2) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + C, \varphi \neq 0$
- 3) $\int a^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
- 4) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a} \right| + C, \varphi \neq \pm a, a \neq 0$
- 5) $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi(x)}{a} + C, a \neq 0$
- 6) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + a^2}} dx = \ln \left(\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) + a^2} \right) + C, a \neq 0$
- 7) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - a^2}} dx = \ln \left| \varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - a^2} \right| + C, \varphi^2 > a^2$

$$8) \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}} dx = \arcsin \frac{\varphi(x)}{a} + C, \quad a > 0, -a < \varphi < a$$

$$9) \int \sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx = -\cos \varphi(x) + C$$

$$10) \int \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx = \sin \varphi(x) + C$$

$$11) \int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)} dx = \operatorname{tg} \varphi(x) + C, \quad \varphi(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbf{Z}, \forall x \in I$$

$$12) \int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2 \varphi(x)} dx = -\operatorname{ctg} \varphi(x) + C, \quad \varphi(x) \neq k\pi, \forall k \in \mathbf{Z}, \forall x \in I$$

$$13) \int \operatorname{tg} \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx = -\ln|\cos \varphi(x)| + C, \quad \varphi(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbf{Z}, \forall x \in I$$

$$14) \int \operatorname{ctg} \varphi(x) \cdot \varphi'(x) dx = \ln|\sin \varphi(x)| + C, \quad \varphi(x) \neq k\pi, \forall k \in \mathbf{Z}, \forall x \in I$$

D₂: O funcție rațională f , definită pe un interval I , este de forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\forall x \in I$, $Q(x) \neq 0$, unde $P, Q \in \mathbf{R}[X]$.

D₃: O funcție rațională se numește funcție rațională simplă dacă are una din formele:

$$1) f(x) = P(x), \quad P \in \mathbf{R}[X]$$

$$2) f(x) = \frac{A}{(x-a)^n}, \quad A, a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*$$

$$3) f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}, \quad A, B, a, b \in \mathbf{R}, a^2 - 4b < 0, n \in \mathbf{N}^*$$

- Orice funcție rațională se poate descompune, în mod unic, în suma de funcții raționale simple

D₄: Fie $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a funcției continue $f : I \rightarrow \mathbf{R}$. Se numește integrala definită a funcției f de la

a la b , numărul real notat și definit prin relația $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ (formula Leibniz-Newton)

$$-\int_a^b (\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx, \quad (\forall) \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

$$-(\forall) c \in I, \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$-(\exists) c \in (a, b) \text{ a.i. } \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

$$-\text{Daca } f \geq 0 \text{ pe } [a, b], \text{ atunci } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$-\text{Daca } f \leq g \text{ pe } [a, b], \text{ atunci } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$-\text{Daca } m, M \in \mathbf{R} \text{ sunt astfel încât } m \leq f(x) \leq M, (\forall) x \in [a, b], \text{ atunci } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$-\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

D_5 : Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ și funcția continuă pozitivă $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$.

Multimea $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ se numește subgraficul funcției f .

D_9 : Funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ se numește continuă pe porțiuni dacă are cel mult un număr finit, nenul, de puncte de discontinuitate și acestea sunt puncte de discontinuitate de speța întâi.

-Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) = g(x)$, $(\forall) x \in (a, b)$ și g este continuă. Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

-O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continuă pe porțiuni este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^p \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i(x) dx$, unde

$f_i : [c_{i-1}, c_i] \rightarrow \mathbf{R}$, $i = \overline{1, p}$ sunt funcțiile asociate lui f .

-Fie $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile cu derivate continue. Dacă $a, b \in I$, atunci:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

-Dacă $\varphi : I \rightarrow I$ este derivabila, cu derivata continuă și $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ este continuă, dacă $a, b \in I$, atunci

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt.$$

-Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continue a.i. $g(x) \leq f(x)$, $(\forall) x \in [a, b]$. Dacă

$$\Gamma_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}, \text{ atunci aria } (\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

-Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continuă. Mulțimea $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / \sqrt{y^2 + z^2} \leq |f(x)|\}$ se numește corpul de rotație

în jurul axei Ox determinat de funcția f . Volumul acestui corp este $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

-Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă. Lungimea graficului funcției este

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

-Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$ continuă. $\phi = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / \sqrt{y^2 + z^2} = f(x), a \leq x \leq b\}$ se numește suprafața de

rotație determinată de funcția f . Aria acestei suprafețe este $A(f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Probleme rezolvate

1. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbf{R} .

b) Să se calculeze $\int_{-1}^0 xf(x) dx$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = f(x)$.

R. a) O funcție admite primitive dacă este continuă pe domeniul de definiție. Problema continuității se pune în punctul $x_0=0$. Calculăm limitele laterale:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x^2 + e^x) = 0^2 + e^0 = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{0} + 1 = 1 \quad \text{și } f(0)=1. \text{ Acestea sunt}$$

egale și atunci funcția este continuă pe \mathbf{R} , deci admite primitive pe \mathbf{R} .

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-1}^0 xf(x) dx &= \int_{-1}^0 x(x^2 + e^x) dx = \int_{-1}^0 x^3 dx + \int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 x \cdot (e^x)' dx = 0 - \frac{(-1)^4}{4} + \\ &+ xe^x \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 x' \cdot e^x dx = -\frac{1}{4} + 0 \cdot e^0 - (-1)e^{-1} - \int_{-1}^0 e^x dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{e} - e^x \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{e} - e^0 + e^{-1} = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} - \frac{5}{4} = \frac{8 - 5e}{4e}. \end{aligned}$$

c) Formula pentru calculul volumului este: $Vol(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. Avem

$$\begin{aligned} Vol(C_g) &= \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x + 2\sqrt{x} + 1) dx = \pi \left(\int_0^1 x dx + 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_0^1 1 dx \right) = \\ &= \pi \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx + x \Big|_0^1 \right) = \pi \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + 1 \right) = \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \right) \pi = \frac{3 + 4 + 6}{6} \pi = \frac{13}{6} \pi. \end{aligned}$$

2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ date prin $f(x) = xe^x$ și $F(x) = (x-1)e^x$.

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{x+1}{x} - 2$ pentru orice $x > 1$.

R. a) $F'(x) = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x = e^x(1+x-1) = xe^x$.

b) $Aria_{\Gamma_f} = \int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) = (1-1)e^1 - (0-1)e^0 = 1$.

c) $\left(\frac{f'(t)}{f(t)} \right)' = \frac{(f'(t))' \cdot f(t) - f'(t) \cdot (f(t))'}{f^2(t)} = \frac{f''(t) \cdot f(t) - f'(t) \cdot f'(t)}{f^2(t)} = \frac{f(t) \cdot f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)}$,

unde $f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x(1+x)$.

$$\int_1^x \frac{f(t) f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \int_1^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)} \right)' dt = \frac{f'(t)}{f(t)} \Big|_1^x = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{\cancel{x+1}}{x \cancel{e^x}} - \frac{\cancel{1+1}}{1 \cdot \cancel{e^1}} = \frac{x+1}{x} - 2.$$

3. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} e \cdot e^x, & x \leq -1 \\ 2+x, & x > -1 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe \mathbf{R} .

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = f(x)$, $x \in [0, 2]$.

c) Să se calculeze $\int_{-2}^0 \frac{x f(x)}{e} dx$.

R. a) Determinăm continuitatea funcției în punctul $x_0 = -1$. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2+x) = 2-1 = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e \cdot e^x = e \cdot e^{-1} = e^0 = 1$;

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2+x) = 2-1 = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 \Rightarrow$ funcția este continuă în $x_0 = -1$ și este continuă pe \mathbf{R} , deci admite primitive pe \mathbf{R} .

b) Volumul se calculează după formula: $Vol(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

$$Vol(C_g) = \pi \int_0^2 (2+x)^2 dx = \pi \int_0^2 (4+4x+x^2) dx = \pi \left(4x + 4 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \pi \left(4 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \frac{2^3}{3} \right) = \pi \left(8 + 8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{24 + 24 + 8}{3} \pi = \frac{56}{3} \pi.$$

$$\text{c) } \int_{-2}^0 \frac{x f(x)}{e} dx = \int_{-2}^{-1} x e^x dx + \frac{1}{e} \int_{-1}^0 (2x+x^2) dx = \int_{-2}^{-1} x (e^x)' dx + \frac{1}{e} \left(x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = x e^x \Big|_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} e^x dx - \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = x e^x \Big|_{-2}^{-1} - e^x \Big|_{-2}^{-1} - \frac{2}{3e} = e^x (x-1) \Big|_{-2}^{-1} - \frac{2}{3e} = -2e^{-1} + 3e^{-2} - \frac{2}{3} e^{-1} = 3e^{-2} - \frac{8}{3} e^{-1} = \frac{3}{e^2} - \frac{8}{3e} = \frac{9e-8}{3e^2}.$$

4. Se consideră funcția $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.

b) Să se determine numărul real $a > 1$ astfel încât $\int_1^a (g(x) - x^3) \cdot e^x dx = 6e^a$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot g^{2009}(x) dx$.

R. a) $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 ((x+1)^3 - 3x^2 - 1) dx = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 1) dx = \int_0^1 (x^3 + 3x) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}.$

$$\begin{aligned} \text{b) } g(x) &= x^3 + 3x \text{ și } \int_1^a (g(x) - x^3) \cdot e^x dx = \int_1^a (x^3 + 3x - x^3) \cdot e^x dx = \int_1^a 3xe^x dx = 3 \int_1^a x(e^x)' dx = \\ &= 3 \left(xe^x \Big|_1^a - \int_1^a x' e^x dx \right) = 3 \left(ae^a - e - \int_1^a e^x dx \right) = 3 \left(ae^a - e - e^x \Big|_1^a \right) = 3(ae^a - e - e^a + e) = 3e^a(a-1). \end{aligned}$$

$$\text{Obținem } 3e^a(a-1) = 6e^a \Big| : 3e^a \Rightarrow a-1 = 2 \Rightarrow a = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot g^{2009}(x) dx &= \int_0^1 g^{2009}(x) \cdot g'(x) dx = g^{2009}(x) \Big|_0^1 \stackrel{g(x)=x^3+3x}{=} \\ &= (1^3 + 3 \cdot 1)^{2009} - (0^3 + 3 \cdot 0)^{2009} = 4^{2009}. \end{aligned}$$

5. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + e^{-x}$.

a) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

b) Folosind faptul că $x^2 + e^{-x^2} \geq 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, să se demonstreze că $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = f(x) + f(-x)$.

$$\text{R. a) } \text{Aria}(\Gamma_f) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + e^{-x}) dx = \left(\frac{x^2}{2} - e^{-x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - e^{-1} - \left(\frac{0}{2} - e^0 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{e}.$$

b) Din $x^2 + e^{-x^2} \geq 1$ obținem $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$ și integram inegalitatea pe intervalul $[0, 1] \Rightarrow$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

c) $g(x) = f(x) + f(-x) = x + e^{-x} - x + e^x = e^{-x} + e^x$ și volumul este dat de: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (e^{-x} + e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 (e^{-2x} + 2 + e^{2x}) dx = \pi \left(-\frac{e^{-2x}}{2} + 2x + \frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \pi \left(\frac{-e^{-2} + 4 + e^2}{2} - \frac{-e^0 + e^0}{2} \right) = \frac{e^2 + 4 - e^{-2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

6. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + e^x + 1$.

a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe \mathbf{R} .

b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e + \frac{1}{3}$.

R. a) O primitivă a funcției f este $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, astfel încât $F'(x) = f(x)$ și $f(x) = x^2 + e^x + 1 > 0$ ca sumă de funcții pozitive $\Rightarrow F'(x) > 0$. Dacă derivata este pozitivă atunci funcția este crescătoare, adică F este funcție crescătoare $\forall x \in \mathbf{R}$.

$$\text{b) } \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 x(x^2 + e^x + 1) dx = \int_0^1 (x^3 + xe^x + x) dx = \left(\frac{x^4}{4} + e^x(x-1) + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 =$$

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx \stackrel{\text{int prin părți}}{=} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

$$= \frac{1}{4} + e^1(1-1) + \frac{1}{2} - e^0(0-1) = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}.$$

$$\text{c) } \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln^2 x + e^{\ln x} + 1}{x} dx = \int_1^e \left(\frac{\ln^2 x}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = (*). \text{ Calculăm primitivele separat:}$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln^2 x \cdot (\ln x)' dx \stackrel{\text{schimbare de var iabilă}}{=} \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot (\ln x)' dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C; \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

$$(*) = \left(\frac{\ln^3 x}{3} + \frac{\ln^2 x}{2} + \ln x \right) \Big|_1^e = \frac{\ln^3 e}{3} + \frac{\ln^2 e}{2} + \ln e - \frac{\ln^3 1}{3} - \frac{\ln^2 1}{2} - \frac{\ln 1}{0} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{2+3+6}{6} = \frac{11}{6}.$$

7. Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e f'(x) dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1, +\infty)$.

c) Să se determine numărul real $a \in (1, e^2)$ astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox , dreptele de ecuații $x=a$ și $x=e^2$ să fie egală cu $\ln \frac{3}{2}$.

R. a) $\int_1^e f'(x) dx = f(x) \Big|_1^e = \left(\frac{1}{x(1+\ln x)} \right) \Big|_1^e = \frac{1}{e(1+\ln e)} - \frac{1}{1(1+\ln 1)} = \frac{1}{e(1+1)} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2e} - 1.$

b) Fie $F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ primitivă a funcției f , atunci $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [1, +\infty)$. Din $x \in [1, +\infty) \Rightarrow x > 0$, $\ln x \geq 0$ și atunci $f(x) \geq 0$. Dacă derivata unei funcții $F'(x) = f(x) \geq 0$ atunci funcția F este crescătoare pe $[1, +\infty)$.

c) $Aria(\Gamma_f) = \int_a^{e^2} f(x) dx = \int_a^{e^2} \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int_a^{e^2} \frac{1}{1+\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_a^{e^2} \frac{(1+\ln x)'}{1+\ln x} dx = \ln(1+\ln x) \Big|_a^{e^2} =$

$$= \ln(1+\ln e^2) - \ln(1+\ln a) = \ln(1+2) - \ln(1+\ln a) = \ln 3 - \ln(1+\ln a) = \ln \frac{3}{1+\ln a}.$$

Din $Aria(\Gamma_f) = \ln \frac{3}{1+\ln a}$ obținem: $\frac{3}{1+\ln a} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1+\ln a = 2 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e \in (1, e^2)$

8. Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ date prin $f(x) = e^x$ și $g(x) = \frac{1}{x}$.

a) Să se calculeze primitivele funcției $f+g$.

b) Să se arate că $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$.

c) Folosind eventual faptul că $2ab \leq a^2 + b^2$, pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, să se demonstreze că

$$\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}.$$

R. a) $\int (f + g)(x) dx = \int \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx = e^x + \ln x + C.$

b) $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \int_1^2 \left(e^{2x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - 1 \right) =$
 $= \frac{e^4 - e^2 - 1 + 2}{2} = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}.$

c) $f(x), g(x) \in \mathbf{R}$, folosind relația $2ab \leq a^2 + b^2$ avem $2 \cdot f(x) \cdot g(x) \leq f^2(x) + g^2(x)$. Integrăm inegalitatea pe intervalul $[1, 2]$ și obținem:

$$2 \int_1^2 f(x) \cdot g(x) dx \leq 2 \int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2} \Rightarrow \int_1^2 f(x) \cdot g(x) dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}.$$

9. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x + 1} dx$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Folosind, eventual, faptul că $x^2 \leq x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, să se demonstreze că $I_2 \leq I_1$.

c) Să se demonstreze că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} + 2 \ln 2$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

R. a) Pentru $n=1$ se obține: $I_1 = \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx = \int_0^1 1 dx = x \Big|_0^1 = 1.$

b) $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x + 1} dx$. Din $x^2 \leq x$, $\forall x \in [0, 1]$ se obține $x^2 + 1 \leq x + 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x + 1} \leq \frac{x + 1}{x + 1}$, $\forall x \in [0, 1]$; integrăm pe

intervalul $[0, 1]$ și se obține $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{x + 1}{x + 1} dx \Rightarrow I_2 \leq I_1.$

c) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + 1}{x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x + 1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1} + 1}{x + 1} + \frac{x^n + 1}{x + 1} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + 1 + x^n + 1}{x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x + 1) + 2}{x + 1} dx =$
 $= \int_0^1 \left(x^n + \frac{2}{x + 1} \right) dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + 2 \ln(x + 1) \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} + 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = \frac{1}{n+1} + 2 \ln 2.$

10. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$ și $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$.

a) Să se verifice că funcția g este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) g(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f'(x) g'(x) dx = \int_0^1 f(x) g(x) dx$.

R. a) $g'(x) = \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x} \right)' = \frac{2e^{2x} \cdot e^x - (e^{2x} - 1) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \cdot (2e^{2x} - e^{2x} + 1)}{(e^x)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} = f(x)$, adică g este

o primitivă a lui f .

b) $f(x)g(x) = \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^x} \right) \cdot \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x} \right) = \frac{e^{4x} - 1}{e^{2x}} = e^{2x} - e^{-2x}$ și

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x})dx = \left(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2} - \left(\frac{e^0}{2} + \frac{e^0}{2} \right) = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2} - 1.$$

c) $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{1}{e^x} = e^x + e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (e^x)' + (e^{-x})' = e^x + (-x)'e^{-x} = e^x - e^{-x}$

$$g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} = \frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x} = e^x - e^{-x} \Rightarrow g'(x) = (e^x)' - (e^{-x})' = e^x + e^{-x}$$

și atunci $f(x) \cdot g(x) = (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) = e^{2x} - e^{-2x}$

$$f'(x) \cdot g'(x) = (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = e^{2x} - e^{-2x} \Rightarrow$$

$$f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g'(x) \Rightarrow \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx.$$

11. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$.

a) Să se calculeze $\int_1^e \left(f(x) - \frac{\ln x}{x} \right) dx$.

b) Să se verifice că $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2}$.

c) Să se arate că șirul care are termenul general $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx$, $n \geq 1$ este o progresie aritmetică cu rația 1.

R. $\int_1^e \left(f(x) - \frac{\ln x}{x} \right) dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + x - \frac{\ln x}{x} \right) dx = \int_1^e x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$.

b) $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + x \right) dx = \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + \int_1^e x dx = \int_1^e \ln x \cdot (\ln x)' dx + \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} =$
 $= \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 0 + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2}$.

c) Dacă diferența a doi termeni consecutivi este constantă atunci este progresie aritmetică.

$$I_{n+1} - I_n = \int_{e^{n+1}}^{e^{n+2}} (f(x) - x) dx - \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx = \int_{e^{n+1}}^{e^{n+2}} \frac{\ln x}{x} dx - \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_{e^{n+1}}^{e^{n+2}} - \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_{e^n}^{e^{n+1}} =$$

$$= \frac{\ln^2 e^{n+2} - \ln^2 e^{n+1}}{2} - \frac{\ln^2 e^{n+1} - \ln^2 e^n}{2} = \frac{(n+2)^2 - (n+1)^2 - (n+1)^2 + n^2}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{n^2} + 4n + 4 - \cancel{n^2} - 2n - 1 - \cancel{n^2} - 2n - 1 + \cancel{n^2}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ și atunci } r = 1.$$

12. Se consideră funcțiile $f_m : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin $f_m(x) = m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$, unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f_1(x) dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x) dx$.

c) Să se determine $m \in \mathbf{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x) dx = \frac{3}{2}$.

R. a) $\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$.

b) $\int_0^1 e^x f_0(x) dx = \int_0^1 e^x (x + 1) dx = \int_0^1 (x + 1) (e^x)' dx \stackrel{\text{int. prin parti}}{=} (x + 1) e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$
 $= 2e - 1 - e^x \Big|_0^1 = 2e - 1 - e + 1 = e$

c) $\int_0^1 f_m(x) dx = \int_0^1 (m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1) dx = \left(m^2 \frac{x^3}{3} + (m^2 - m + 1) \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 =$
 $= \frac{m^2}{3} + \frac{m^2 - m + 1}{2} + 1 = \frac{2m^2 + 3m^2 - 3m + 3 + 6}{6} = \frac{5m^2 - 3m + 9}{6}$ și

$\frac{5m^2 - 3m + 9}{6} = \frac{3}{2} \cdot 6 \Rightarrow 5m^2 - 3m + 9 = 9 \Rightarrow 5m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m(5m - 3) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = \frac{3}{5}$. Din
 $m \in \mathbf{R}^* \Rightarrow m \in \left\{ \frac{3}{5} \right\}$.

13. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ se consideră integralele $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$.

a) Să se verifice că $I_0 = 1$.

b) Să se calculeze I_1 .

c) Folosind, eventual, faptul că $1 \leq \ln x \leq 2, \forall x \in [e, e^2]$, să se demonstreze că $1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n, \forall n \in \mathbf{N}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

R. a) $I_0 = \int_e^{e^2} \frac{\ln^0 x}{x} dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$.

b) $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{e^2} \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int_e^{e^2} \ln x \cdot (\ln x)' dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_e^{e^2} = \frac{\ln^2 e^2}{2} - \frac{\ln^2 e}{2} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$.

c) Din $1 \leq \ln x \leq 2, \forall x \in [e, e^2]$ prin ridicare la puterea $n \in \mathbf{N} \Rightarrow 1^n \leq \ln^n x \leq 2^n \Big| : x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\ln^n x}{x} \leq \frac{2^n}{x}$ și

integrăm inegalitatea pe $[e, e^2] \Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx \leq \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx \leq \int_e^{e^2} \frac{2^n}{x} dx \Rightarrow \ln x \Big|_e^{e^2} \leq \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} \Big|_e^{e^2} \leq 2^n \ln x \Big|_e^{e^2} \Rightarrow$

$= \ln e^2 - \ln e \leq \frac{\ln^{n+1} e^2 - \ln^{n+1} e}{n+1} \leq 2^n (\ln e^2 - \ln e) \Rightarrow 2 - 1 \leq \frac{2^{n+1} - 1^{n+1}}{n+1} \leq 2^n (2 - 1) \Rightarrow 1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n$.

14. Se consideră funcția $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x) dx$.

b) Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = 0$.

c) Să se demonstreze că $0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 8$, oricare ar fi $m \in [0, 2]$.

R. a) $\int_0^4 f^2(x) dx = \int_0^4 (16 - x^2) dx = \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 16 \cdot 4 - \frac{4^3}{3} = \frac{192 - 64}{3} = \frac{128}{3}$.

b) $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} dx = - \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} dx = -\sqrt{16 - x^2} \Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = -(\sqrt{16 - 5} - \sqrt{16 - 5}) = 0$, sau

determinăm paritatea funcției $g: [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$:

$g(-x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - (-x)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} = -g(x)$, funcție impară pe intervalul simetric $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \Rightarrow$

$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = 0$.

c) Considerăm expresiile $4 + x$ și $4 - x$, unde $x \in [0, m]$, care sunt pozitive și aplicăm inegalitatea mediilor:

$0 \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{(4+x)(4-x)} \leq \frac{4+x+4-x}{2} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{16 - x^2} \leq 4$. Integram inegalitatea pe

intervalul $[0, m]$, se obține: $0 \leq \int_0^m \sqrt{16 - x^2} dx \leq \int_0^m 4 dx \Rightarrow 0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 4x \Big|_0^m = 4m$, dar $m \leq 2$ și atunci

$4m \leq 8$ și avem $0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 8$.

15. Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = e - 1$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = xe^{-x} f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

c) Să se calculeze $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) dx$.

R. a) $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 \frac{e^x \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.

b) $g(x) = x \cdot e^{-x} \cdot e^x \cdot \sqrt{x^2 + 1} = x \cdot e^{-x+x} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = x\sqrt{x^2 + 1}$ și

$$\begin{aligned} \text{Aria}(\Gamma_g) &= \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)' (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2 + 1)^3} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{(1^2 + 1)^3} - \sqrt{(0^2 + 1)^3} \right) = \frac{1}{3} (\sqrt{8} - \sqrt{1}) = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}. \end{aligned}$$

c) $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} \cdot e^x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_{-1}^1 e^x (x^2 + 1) dx \stackrel{\text{int prin părți}}{=} \int_{-1}^1 (x^2 + 1) \cdot (e^x)' dx =$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + 1)e^x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2xe^x dx = 2e - 2e^{-1} - 2 \int_{-1}^1 x(e^x)' dx = 2e - 2e^{-1} - 2 \left(xe^x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx \right) = \\ &= 2e - 2e^{-1} - 2 \left(e + e^{-1} - e^x \Big|_{-1}^1 \right) = 2e - 2e^{-1} - 2(e + e^{-1} - e + e^{-1}) = 2e - 6e^{-1} = 2 \left(e - \frac{3}{e} \right). \end{aligned}$$

16. Se consideră integralele $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$, $n \in \mathbf{N}$.

a) Să se verifice că $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze I_1 .

c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

R. a) $I_0 = \int_2^3 \frac{x^0}{x^2 - 1} dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{1} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

b) $I_1 = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$.

c) $I_{n+2} - I_n = \int_2^3 \frac{x^{n+2}}{x^2 - 1} dx - \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx = \int_2^3 \left(\frac{x^{n+2}}{x^2 - 1} - \frac{x^n}{x^2 - 1} \right) dx = \int_2^3 \frac{x^{n+2} - x^n}{x^2 - 1} dx = \int_2^3 \frac{x^n (x^2 - 1)}{x^2 - 1} dx =$

$$= \int_2^3 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_2^3 = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

17. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \ln x - x$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1, +\infty)$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h: [1, e] \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) + x$, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=e$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R. a)} \int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx &= \int_1^2 (\cancel{x - \ln x} + \cancel{x + \ln x})^2 dx = \int_1^2 (2x)^2 dx = 4 \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \\ &= 4 \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = 4 \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

b) F primitivă a funcției f , atunci $F'(x) = f(x)$ și $F''(x) = f'(x)$ și $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

Tabelul de semn:

x	0	1	$+\infty$
$F''(x)=f'(x)$	+++++	0	-----

Pe $(1, +\infty)$, $F''(x) \leq 0 \Rightarrow F$ este concavă pe $(1, +\infty)$.

c) $h: [1, e] \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) + x = \ln x - x + x = \ln x$ și

$$\begin{aligned} \text{Aria}(\Gamma_h) &= \int_1^e h(x) dx = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e \ln x \cdot (x)' dx \stackrel{\text{int. prin}}{\text{parti}} = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e 1 dx = \\ &= e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1. \end{aligned}$$

18. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x + \ln x$.

a) Știind că $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - \ln x$, să se verifice că $\int g(x) dx = g(x) + C$, $x > 0$.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^e x f(x^2) dx = \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}$.

R. a) $g(x) = f(x) - \ln x = e^x + \ln x - \ln x = e^x$ și $\int g(x) dx = \int e^x dx = e^x + C = g(x) + C$, $\forall x > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e (e^x + \ln x) dx = \int_1^e e^x dx + \int_1^e \ln x dx = e^x \Big|_1^e + \int_1^e \ln x \cdot (x)' dx \stackrel{\text{int. prin}}{\text{parti}} = \\ &+ x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx = e - 1 + e \underbrace{\ln e}_{=1} - 1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} - \int_1^e 1 dx = e - 1 + e - 0 - x \Big|_1^e = 2e - 1 - e + 1 = e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \int_1^e x f(x^2) dx &= \int_1^e x (e^{x^2} + \ln x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^e e^{x^2} (x^2)' dx + \frac{1}{2} \int_1^e \ln x^2 \cdot (x^2)' dx \stackrel{\text{schimb. de}}{\text{variabilă}} = \\ &= \frac{1}{2} (e^{x^2} + x^2 \ln x^2 - x^2) \Big|_1^e = \frac{1}{2} \left(e^{e^2} + e^2 \underbrace{\ln e^2}_{=2} - e^2 - e^2 - 1^2 \underbrace{\ln 1^2}_{=0} + 1^2 \right) = \frac{e^{e^2} + 2e^2 - e^2 - e + 1}{2} = \\ &= \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}. \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int \ln x^2 \cdot (x^2)' dx}_{u=x^2, du=(x^2)' dx} = \int \ln u du = \int \ln u \cdot (u)' du \stackrel{\text{int. prin}}{\text{parti}} = u \ln u - \int u \cdot \frac{1}{u} du = u \ln u - u + C = x^2 \ln x^2 - x^2 + C.$$

19. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e x \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $(0, +\infty)$.

c) Să se verifice că $\int_1^2 f'(x)f(x)dx = -\frac{22}{81}$.

R. a)
$$\int_1^e x \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^e x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \int_1^e x \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx =$$

 $= \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

b) Fie $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $F'(x) = f(x)$ primitivă a funcției f . Atunci

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} \geq 0, \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow F'(x) \geq 0 \text{ și atunci funcția } F$$

este crescătoare pe $(0, +\infty)$.

c)
$$\int_1^2 f'(x)f(x)dx = \int_1^2 f(x)f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^2 = \frac{f^2(2) - f^2(1)}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(2+1)^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(1+1)^2} \right)^2 \right] =$$

 $= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right)^2 - \left(1 - \frac{1}{4} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} - 1 + \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-22}{369} \cdot \frac{8^4}{9} = -\frac{22}{81}$.

20. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = e^{-x}$ și $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

a) Să se arate că $F(x) = -f(x) + 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că funcția $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = F(x) - f(x)$ este concavă pe \mathbf{R} .

c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$.

R. a)
$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^x = -e^{-x} + e^0 = -e^{-x} + 1 = -f(x) + 1.$$

b) $h(x) = F(x) - f(x) = -f(x) + 1 - f(x) = 1 - 2f(x)$ și $h'(x) = -2f'(x)$, iar $h''(x) = -2f''(x)$.

$f'(x) = (e^{-x})' = (-x)' \cdot e^{-x} = -e^{-x}$ și $f''(x) = (-e^{-x})' = -(-x)' \cdot (e^{-x}) = e^{-x}$. Cum $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, $f''(x) > 0 \Rightarrow h''(x) < 0$ și h este concavă pe \mathbf{R} .

c)
$$\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx = \int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-x^2)' \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-1^2} - e^0) = -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1) =$$

 $= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = -\frac{1-e}{2e} = \frac{e-1}{2e}$.

21. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x + 3^{-x}$.

a) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox , a graficului funcției

$$g: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 3^{-x}.$$

c) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(-\infty, 0]$ și convexă pe $[0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R. a)} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (3^x + 3^{-x}) dx = \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{3^1}{\ln 3} - \frac{3^{-1}}{\ln 3} - \left(\frac{3^{-1}}{\ln 3} - \frac{3^1}{\ln 3} \right) = \\ &= \frac{3 - 3^{-1} - 3^{-1} + 3}{\ln 3} = \frac{6 - \frac{2}{3}}{\ln 3} = \frac{16}{3 \ln 3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} Vol(C_g) &= \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 3^{-2x} dx = \frac{\pi}{-2} \int_0^1 3^{-2x} \cdot (-2x)' dx = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3^{-2x}}{\ln 3} \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{3^{-2} - 3^0}{\ln 3} \right) = \\ &= -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{9} - 1 = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{-8}{9} = \frac{4\pi}{9 \ln 3}. \end{aligned}$$

c) Fie $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, primitivă a lui f pe \mathbf{R} , atunci $F'(x) = f(x)$ și $F''(x) = f'(x)$,

$$f'(x) = 3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3 = \ln 3 (3^x - 3^{-x}) \text{ și tabelul de semn pentru derivată:}$$

x	$-\infty$	0
$F''(x)=f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$+$	$+$

Pe $(-\infty, 0]$, $F''(x) \leq 0 \Rightarrow F$ este concavă, iar pe $[0, +\infty)$, $F''(x) \geq 0 \Rightarrow F$ este convexă.

22. Se consideră funcția $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$.

b) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este convexă pe $[2, +\infty)$.

c) Să se determine $a > 2$ astfel încât aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției f axa Ox și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=a$ să fie egală cu $\ln 3$.

$$\mathbf{R. a)} \int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx = \int_2^e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \int_2^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_2^e = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2.$$

b). F este concavă dacă $F''(x) \leq 0$ pe $[2, +\infty)$. Calculăm derivata a doua a funcției F : $F'(x) = f(x)$ și

$$F''(x) = f'(x) = \left(\frac{1}{x} \right)' + \left(\frac{1}{x-1} \right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) > 0, \forall x \in [2, +\infty) \text{ și atunci } F''$$

este concavă pe $[2, +\infty)$.

c) $Aria(\Gamma_f) = \int_2^a f(x) dx = \ln x + \ln(a-1) - \ln 2 = \ln \frac{a(a-1)}{2}$ și $Aria(\Gamma_f) = \ln 3 \Rightarrow$

$$\ln \frac{a(a-1)}{2} = \ln 3 \Rightarrow \frac{a(a-1)}{2} = 3 \Rightarrow a^2 - a = 6 \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5, \quad a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \\ a_2 = \frac{1+5}{2} = 3 \end{cases}$$

Cum $a > 2$, valoarea cerută este $a=3$.

23. Se consideră funcțiile $f, F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, date prin $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ și $F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze $\int_1^2 f(e^x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^2 f(x)F(x)dx = \frac{(3\ln 2 - 1)^2}{2}$

$$\mathbf{R. a)} F'(x) = (x+1)' \ln x + (x+1)(\ln x)' - x' + 1' = \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + \frac{x+1}{x} - 1 = \ln x + \frac{1}{x} = f(x).$$

$$\mathbf{b)} \int_1^2 f(e^x) dx = F(e^x) \Big|_1^2 = \left((e^x + 1) \ln e^x - e^x + 1 \right) \Big|_1^2 = (e^2 + 1) \ln e^2 - e^2 + 1 - [(e + 1) \ln e - e + 1] = (e^2 + 1) \cdot 2 - e^2 - (e + 1) \cdot 1 + e = 2e^2 + 2 - e^2 - e - 1 + e = e^2 + 1.$$

$$\mathbf{c)} \int_1^2 f(x)F(x)dx = \int_1^2 F(x)F'(x)dx = \frac{F^2(x)}{2} \Big|_1^2 = \frac{\left((2+1) \ln 2 - 2 + 1 \right)^2 - \overbrace{\left((2 \ln 1 - 1 + 1) \right)^2}^{=0}}{2} = \frac{(3 \ln 2 - 1)^2}{2}.$$

24. Se consideră integralele $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx, n \in \mathbf{N}$.

a) Să se calculeze I_0 .

b) Să se arate că $I_1 = e^2$.

c) Să se arate că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e(2^{n+1}e - 1)$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

$$\mathbf{R. a)} I_0 = \int_1^2 x^0 e^x dx = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e = e(e - 1).$$

$$\mathbf{b)} I_1 = \int_1^2 x e^x dx = \int_1^2 x (e^x)' dx \stackrel{\text{int. prin părți}}{=} x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 x' e^x dx = 2e^2 - e - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

$$\mathbf{c)} I_{n+1} = \int_1^2 x^{n+1} e^x dx = \int_1^2 x^{n+1} (e^x)' dx = x^{n+1} e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 (x^{n+1})' e^x dx = 2^{n+1} e^2 - 1^{n+1} e - (n+1) \int_1^2 x^n e^x dx \Rightarrow I_{n+1} = 2^{n+1} e^2 - e - (n+1) I_n \Rightarrow I_{n+1} + I_n = 2^{n+1} e^2 - e = e(2^{n+1} e - 1), \text{ pentru orice } n \in \mathbf{N}.$$

25. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de forma $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ unde $m, n, p \in \mathbf{R}$

a) Pentru $m = 0, n = -3, p = 2$, să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

b) Să se determine $m, n, p \in \mathbf{R}$ știind că $f'(-1) = f'(1) = 0$ și că $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$.

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t) dt$.

R. a) Pentru $m = 0, n = -3, p = 2$, avem $f(x) = x^3 - 3x + 2$ și

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{1-6+8}{4} = \frac{3}{4}.$$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$ și

$$\begin{cases} f'(-1) = 3 - 2m + n \\ f'(1) = 3 + 2m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 2m + n = 0 \\ 3 + 2m + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + n = -3 \\ +2m + n = -3 \end{cases}$$

$$2n = -6 \Rightarrow n = -3 \text{ și } m = 0$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 4 \Rightarrow \left(\frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^2}{2} + px \right) \Big|_{-1}^1 = 4 \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + p - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - p \right) = 4 \Rightarrow 2p = 4 \Rightarrow p = 2.$$

c) $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x (t^3 + mt^2 + nt + p) dt = \left(\frac{t^4}{4} + m \frac{t^3}{3} + n \frac{t^2}{2} + pt \right) \Big|_0^x = \frac{x^4}{4} + m \frac{x^3}{3} + n \frac{x^2}{2} + px$ și

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4} x^4 + m \frac{x^3}{3} + n \frac{x^2}{2} + px}{x^4} = \frac{1}{4}.$$

26. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = 1 + \ln x$ și $g(x) = x \ln x$.

a) Să se arate că g este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

R. a) $g'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = f(x) \Rightarrow g$ este o primitivă a funcției f .

b) $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx = \int_1^e g(x) \cdot g'(x) dx \stackrel{\int u du = \frac{u^2}{2} + C}{=} \frac{g^2(x)}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2} (g^2(e) - g^2(1)) =$
 $= \frac{1}{2} (e^2 \ln^2 e - 1^2 \ln^2 1) = \frac{1}{2} e^2 \cdot 1^2 = \frac{e^2}{2}.$

c) $Vol(C_f) = \pi \int_1^e f^2(x) dx = \pi \frac{x^3}{3} \left(\ln^2 x - \frac{2}{3} \ln x + \frac{2}{9} \right) \Big|_1^e = \pi \left[\frac{e^3}{3} \left(\ln^2 e - \frac{2}{3} \ln e + \frac{2}{9} \right) - \right.$
 $\left. - \frac{1}{3} \left(\ln^2 1 - \frac{2}{3} \ln 1 + \frac{2}{9} \right) \right] = \pi \left[\frac{e^3}{3} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} \right] = \frac{5e^3 - 2}{27}.$

Am calculat primitiva:

$$\int f^2(x) dx = \int x^2 \ln^2 x dx = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{3} \int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \right) =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2x^3}{9} \ln x + \frac{2}{9} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} \left(\ln^2 x - \frac{2}{3} \ln x + \frac{2}{9} \right) + C.$$

$$f(x) = \ln^2 x \Rightarrow f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \quad \left| \quad f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \right.$$

$$g'(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3} \quad \left| \quad g'(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3} \right.$$

27. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^{1004} + 2009^x$.

a) Să se determine $\int f(x) dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe \mathbf{R} .

c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$.

R. a) $\int f(x) dx = \int (x^{1004} + 2009^x) dx = \frac{x^{1005}}{1005} + \frac{2009^x}{\ln 2009} + C.$

b) Fie $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a funcției f , atunci $F'(x) = f(x)$ și $x^{1004} > 0, 2009^x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, atunci F este funcție crescătoare pe \mathbf{R} .

c) $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx = \int_0^1 x \cdot (x^{2008} + 2009^{x^2}) dx = \int_0^1 x^{2009} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 2x \cdot 2009^{x^2} dx = \frac{x^{2010}}{2010} \Big|_0^1 +$
 $+ \frac{1}{2} \int_0^1 2009^{x^2} \cdot (x^2)' dx = \frac{1}{2010} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2009^{x^2}}{\ln 2009} \Big|_0^1 = \frac{1}{2010} + \frac{1}{2} \left(\frac{2009}{\ln 2009} - \frac{1}{\ln 2009} \right) = \frac{1}{2010} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2008}{\ln 2009}.$

28. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) Să se determine $\int (x^2 + 1) \cdot f(x) dx$.

b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2e)$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e(e-1)$.

R. a) $\int (x^2 + 1) \cdot f(x) dx = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx = \int (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C.$

b) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = 1 + \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 =$
 $= \ln e + \ln 2 - \ln 1 = \ln(2e).$

c) $\int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = \int_0^1 (e^{f(x)})' dx = e^{f(x)} \Big|_0^1 = e^{f(1)} - e^{f(0)} = e^2 - e^1 = e(e-1).$

29. Se consideră integralele $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$ și $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1} dx$.

a) Să se verifice că $I + J = e - 1$.

b) Utilizând, eventual, inegalitatea $e^x \geq x + 1$, adevărată pentru orice $x \in \mathbf{R}$, să se arate că $J \geq \frac{1}{2}$.

c) Să se demonstreze că $I = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$.

$$\mathbf{R. a)} \quad I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{x+1} + \frac{xe^x}{x+1} \right) dx = \int_0^1 \frac{e^x + xe^x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{e^x(x+1)}{x+1} dx =$$

$$= \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

b) Luând $e^x \geq x+1 \cdot x \xrightarrow[x \in [0,1]]{x \geq 0} xe^x \geq x(x+1) : (x+1) \xrightarrow[x \in [0,1]]{x+1 \geq 0} \frac{xe^x}{x+1} \geq x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1} dx \geq \int_0^1 x dx \Rightarrow J \geq \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \Rightarrow J \geq \frac{1}{2}.$$

c) Aplicăm metoda integrării prin părți pentru calculul integralei definite I :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} \cdot (e^x)' dx = \frac{e^x}{x+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{e}{2} - 1 + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx =$$

$$= \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx.$$

30. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Utilizând faptul că $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ și $x \in [0,1]$, să se arate că $I_{2009} \geq I_{2008}$.

c) Folosind, eventual, identitatea $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$, adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}$ și $x \in \mathbf{R}$,

să se arate că $I_n = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$.

R. a) $I_1 = \int_0^1 x(1+x) dx = \int_0^1 (x+x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

b) Din $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1} \cdot x, x \geq 0 \Rightarrow x(1+x)^n \leq x(1+x)^{n+1}$ și pentru $n = 2008$ se obține:

$$x(1+x)^{2008} \leq x(1+x)^{2009}. \text{ Integrăm pe intervalul } [0,1] \Rightarrow$$

$$\int_0^1 x(1+x)^{2008} dx \leq \int_0^1 x(1+x)^{2009} dx \Rightarrow I_{2008} \leq I_{2009} \Rightarrow I_{2009} \geq I_{2008}.$$

c) $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx \stackrel{\substack{\text{aplicăm} \\ \text{egalitatea}}}{=} \int_0^1 \left[(1+x)^{n+1} - (1+x)^n \right] dx \stackrel{\substack{u(x)=1+x \\ u'(x)=1}}{=} \left(\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2} - \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1 =$

$$= \frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+2) \cdot 2^{n+2} - (n+1) \cdot 2^{n+1} - (n+1) + (n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{2^{n+1} (2n - n) - 1 + 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

31. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = xe^x$.

a) Să se determine $\int_0^1 f(x) e^{-x} dx$.

b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x)dx = 2e - 1$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$.

R. a) $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx = \int_0^1 x \underbrace{e^x \cdot e^{-x}}_{e^0=1} dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

b) $f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$ și

$$\int_0^1 f''(x)dx = f'(x) \Big|_0^1 = e^x(1+x) \Big|_0^1 = e(1+1) - e^0(1+0) = 2e - 1.$$

c) $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \int_1^2 \frac{x^2 e^{x^2}}{x} dx = \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 e^{x^2} \cdot (x^2)' dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e) = \frac{e}{2}(e^3 - 1)$.

32. Se consideră funcțiile $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x)=1-x$, $g(x)=1-x+x^2-x^3+\dots+x^{2008}-x^{2009}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .

b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

c) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)g(x)dx < 1$.

R. a) $\int f(x) dx = \int (1-x) dx = x - \frac{x^2}{2} + C$.

b) $Vol(C_f) = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (1-x)^2 dx = \pi \left(\int_0^1 1 dx - 2 \int_0^1 x dx + \int_0^1 x^2 dx \right) =$

$$= \pi \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

c) $\int_0^1 (x+1)g(x)dx = \int_0^1 (1+x)(1-x+x^2-x^3+\dots+x^{2008}-x^{2009})dx = \int_0^1 (1-x^{2010}) dx =$

$$= \left(x - \frac{x^{2011}}{2011} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2011} < 1.$$

33. Pentru orice număr natural nenul n se consideră, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Utilizând, eventual, inegalitatea $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$, adevărată pentru orice $x \in [0,1]$ și $n \in \mathbf{N}^*$, să se

demonstreze că $\frac{1}{2} \leq 2010 \cdot I_{2009} \leq 1$.

R. a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[x - \ln(x+1) \right]_0^1 = 1 - \ln 2 = \ln \frac{e}{2}$.

b) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{x+1} - \frac{x^n}{x+1} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

c) $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n, \forall x \in [0,1]$ și $n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow \frac{x^{2009}}{2} \leq \frac{x^{2009}}{x+1} \leq x^{2009}, \forall x \in [0,1]$ și folosind monotonia integralei

definite obținem: $\int_0^1 \frac{x^{2009}}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2009}}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^{2009} dx \Rightarrow$

$$\frac{x^{2010}}{2 \cdot 2010} \Big|_0^1 \leq I_{2009} \leq \frac{x^{2010}}{2010} \Big|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 2010} \leq I_{2009} \leq \frac{1}{2010} \cdot 2010 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 2010 \cdot I_{2009} \leq 1.$$

34. Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + x \ln x$ și $g(x) = 2x + \ln x + 1$.

a) Să se arate că f este o primitivă a funcției g .

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

R. a) f este primitivă a lui g dacă $f'(x) = g(x), \forall x \in (0, +\infty)$.

$$f'(x) = (x^2)' + (x \ln x)' = 2x + x' \ln x + x(\ln x)' = 2x + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 2x + \ln x + 1 = g(x).$$

b) $\int_1^e f(x)g(x)dx = \int_1^e f(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^e = \frac{f^2(e) - f^2(1)}{2} =$
 $= \frac{e^2 + e \ln e - 1^2 - 1 \ln 1}{2} = \frac{e^2 + e - 1}{2}.$

c)

$$\begin{aligned} \text{Aria}(\Gamma_f) &= \int_1^e f(x)dx = \int_1^e (x^2 + x \ln x)dx = \int_1^e x^2 dx + \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^e + \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \\ &- \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \\ &= \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

35. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^x + 3x^2 + 2$ și $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 (xf(x) + F(x))dx = F(1)$.

R. a) $F'(x) = (e^x)' + (x^3)' + 2x' - 1' = e^x + 3x^2 + 2 = f(x)$.

b) $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx = \int_0^1 F'(x) \cdot F(x) dx = \frac{F^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{F^2(1) - F^2(0)}{2} =$
 $= \frac{(e+1+2)^2 - (e^0-1)^2}{2} = \frac{(e+2)^2}{2}.$

c) $\int_0^1 (xf(x) + F(x))dx = \int_0^1 (x \cdot F'(x) + x' \cdot F(x))dx = \int_0^1 (x \cdot F(x))dx =$
 $= x \cdot F(x) \Big|_0^1 = 1 \cdot F(1) - 0 \cdot F(0) = F(1).$

