Complemente teoretice

Limite de funcții

Notații: $f:D\rightarrow\mathbf{R}$, $D\subset\mathbf{R}$, α - punct de acumulare a lui D;

Definiții ale limitei

Definiția 1.1. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l, l\in\overline{\mathrm{R}}$, dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui α astfel încât $\forall\ x\in D\cap U$, $x\neq\alpha$, să rezulte $f(x)\in V$.

Definiția 1.2. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l, l\in\overline{\mathrm{R}}$**,** dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n\in D\setminus\{\alpha\}$**,** având $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=l$ (criteriul cu şiruri);

Definiția 1.3. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l, l\in\overline{\mathrm{R}}$**,** dacă $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_\varepsilon>0$ astfel încât $\forall x\in D\setminus\{\alpha\}$ şi $|x-\alpha|<\delta_\varepsilon$ rezultă $|f(x)-l|<\varepsilon$;

Definiția 1.4. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l$**,** dacă $l_s=l_d=l$, unde $l_s=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}} f(x)$ şi $l_d=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} f(x)$.

Operații cu limite de funcții

$f:D\rightarrow\mathbf{R}$, $g:D\rightarrow\mathbf{R}$, α - punct de acumulare a lui D, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l_2$, $l_1,l_2\in\mathbf{R}$;

1. $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))=l_1+l_2$;
2. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\cdot g(x)=l_1\cdot l_2$;
3. $\lim\limits_{x\to\alpha} af(x)=a\cdot l_1$;
4. daca $l_2\neq 0, \lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}$.

Limite tip

1. $\lim\limits_{x\to\alpha}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+...+a_n$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n)=\lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n;$$

2. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}=\dfrac{a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+...+a_n}{b_0\alpha^m+b_1\alpha^{m-1}+...+b_m}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m};$$

3. $\lim_{x\to\alpha}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{\alpha},\alpha\in R_+,n\in N,n\ge 2$; $\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[2n+1]{x}=-\infty$;

4. $\lim_{x\to\alpha}a^x=a^\alpha,\alpha\in R,a\in R_+^*\setminus\{1\}$; $\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}a^x=0$, dacă $a>1$;

$\lim_{x\to\infty}a^x=0$, $\lim_{x\to-\infty}a^x=\infty$, dacă $0<a<1$;

5. $\lim_{x\to\alpha}\log_a x=\log_a\alpha,\alpha>0$ finita, $\alpha\in R_+^*\setminus\{1\}$; $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_a x=-\infty$ şi $\lim_{x\to\infty}\log_a x=+\infty$ dacă $a>1$; $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_a x=+\infty$ şi $\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$ dacă $0<a<1$;

6. $\lim_{x\to\alpha}\sin x=\sin\alpha$, $\lim_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha$; $\lim_{x\to\alpha}tgx=tg\alpha,\alpha\notin\frac{\pi}{2}+\pi Z$, $\lim_{x\to\alpha}ctgx=ctg\alpha,\alpha\notin\pi Z$;

$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}tgx=\infty$, $\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}}tgx=-\infty$; $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}ctgx=\infty$, $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}ctgx=-\infty$;

7. $\lim_{x\to\alpha}\arcsin x=\arcsin\alpha,\alpha\in[-1,1]$, $\lim_{x\to\alpha}\arccos x=\arccos\alpha,\alpha\in[-1,1]$;

$\lim_{x\to\alpha}arctgx=arctg\alpha,\alpha\in R$, $\lim_{x\to\alpha}arcctgx=arcctg\alpha,\alpha\in R$; $\lim_{x\to-\infty}arctgx=-\frac{\pi}{2}$,

$\lim_{x\to\infty}arctgx=\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x\to-\infty}arcctgx=\pi$, $\lim_{x\to\infty}arcctgx=0$;

8. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{arctgx}{x}=1$;

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=0,\forall n\in Z,a>1$;

10. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

11. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;

12. $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,a>0$,

13. $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,\forall r\in R$.

Continuitatea funcţiilor

Definiţia 1. Fie $f:D\to\mathbf{R}$, $x_o\in D$, x_o–punct de acumulare a lui D, f este **continuă** în x_o, dacă $\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, iar x_o se numeşte **punct de continuitate**.

Definiţia 2. Fie $\alpha\in D$, α este **punct de discontinuitate de prima speţă** dacă există şi sunt finite limitele laterale în α, dar funcţia nu este continuă în α.

Definiţia 3. Fie $\alpha\in D$, α este **punct de discontinuitate de speţa a doua** dacă nu este de prima speţă.

Teoremă. Dacă $f:I\to\mathbf{R}$, I – interval şi f continuă pe I, atunci $J=f(I)$ este interval (o funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval).

Funcții derivabile

Definiția derivatei într-un punct

$f : E \to \mathbf{R}$, $x_o \in E$, x_o – punct de acumulare a lui E:

- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ există şi este finită
- $f_s'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- $f_d'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- o funcție este derivabilă într-un punct $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$

  Interpretarea geometrică:

- dacă $f'(x_0)\in\mathbf{R}$, atunci aceasta reprezintă **panta tangentei** la graficul funcției în punctul x_0, $\boldsymbol{m=f'(x_0)}$.
- dacă $f'(x_0)\in\mathbf{R}$, $\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$ este **ecuația tangentei** la graficul funcției f în punctul $A(x_0,f(x_0))$;
- dacă f este continuă în x_0, $f_d'(x_0) = +\infty$, $f_s'(x_0) = -\infty$, sau invers, x_0 este **punct de întoarcere** al graficului;
- dacă f este continuă în x_0 şi există derivatele laterale în x_0, cel puțin una fiind finită, dar f nu este derivabilă în x_0, x_0 este **punct unghiular** al graficului.

Reguli de derivare

$f,g:E\to\mathbf{R}$, f,g derivabile în $x\in E$:

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
2. $(cf)'(x) = cf'(x)$, $c\in\mathbf{R}$;
3. $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
4. dacă $g(x)\neq 0$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;
5. **derivata funcției compuse**: dacă $f:I\to J$, $g:J\to\mathbf{R}$, f derivabilă în $x_0\in I$ şi g derivabilă în $y_0 = f(x_0)$, atunci $(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$;
6. **derivate funcției inverse**: dacă $f:I\to J$ continuă, bijectivă şi derivabilă în x_0 cu $f'(x_0)\neq 0$, atunci $f^{-1}:J\to I$ este derivabilă în $y_0= f(x_0)$ şi $f^{-1}(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Definiție: Punctele critice ale unei funcții derivabile sunt rădăcinile (zerourile) derivatei întâi.

Derivate de ordin superior

Fie $f:I\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x_0 \in I$, o funcție derivabilă. Spunem că f este de două ori derivabilă în x_0 dacă există şi este finită:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0)$$

Derivatele funcțiilor elementare

Funcția (condiții)	Derivata (condiții)
c, (constanta)	0
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
x^r, $r \in \mathbb{R}$, $x>0$	rx^{n-1}
$\sqrt{x}$, $x \geq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$
$\log_a x$, $a \neq 1$, $a>0$, $x>0$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$
$\ln x$, $x>0$	$\frac{1}{x}$
a^x, $a \neq 1$, $a>0$, $x>0$	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg}\, x$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{ctg}\, x$, $x \neq k\pi, k \in Z$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$, $x \in [-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$
$\text{arcos}\, x$, $x \in [-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$
$\text{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Derivatele funcțiilor compuse

Funcția (condiții)	Derivata (condiții)
u^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$nu^{n-1} \cdot u'$
u^r, $r \in \mathbb{R}$, $u>0$	$ux^{n-1} \cdot u'$
$\sqrt{u}, u \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}, u > 0$
$\log_a u$, $a \neq 1$, $a>0$, $u>0$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{u'}{u}$
$\ln u$, $u>0$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
a^u, $a \neq 1$, $a>0$	$a^u \ln a \cdot u'$
e^u	$e^u \cdot u'$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\text{tg}\, u$, $\cos u \neq 0$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\text{ctg}\, u$, $\sin u \neq 0$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\arcsin u$, $u \in [-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, $u \in (-1,1)$
$\arccos u$, $u \in [-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, $u \in (-1,1)$
$\text{arctg}\, u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\text{arcctg}\, u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Proprietăți ale funcțiilor derivabile

Definiție: Fie $f:I\to\mathbf{R}$, cu $I\subset\mathbf{R}$, interval.

1. Spunem că punctul $x_0\in I$ este un **punct de maxim local** strict pentru f, dacă există o vecinătate U a lui x_0, astfel încât: $f(x)<f(x_0),\ \forall x\in U\cap\left(I\setminus\{x_0\}\right)$.

2. . Spunem că punctul $x_0\in I$ este un **punct de minim local** strict pentru f, dacă există o vecinătate U a lui x_0, astfel încât: $f(x)>f(x_0),\ \forall x\in U\cap\left(I\setminus\{x_0\}\right)$.

Teorema lui Fermat:

Fie $f:I\to\mathbf{R}$ derivabilă pe I. În orice punct extrem local din interiorul lui I, f' este nulă.

Teorema lui Rolle:

Dacă funcția continuă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este derivabilă pe (a,b) şi $f(a)=f(b)$ atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$.

Teorema lui Lagrange:

Dacă funcția continuă $f:[a,b]\to$R este derivabilă pe (a,b), atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Consecințe ale Teoremei lui Lagrange:

1. Fie $f:E\to\mathbf{R}$ o funcție derivabilă şi $I\subset E$ un interval.
   - Dacă $\forall x\in I$, avem $f'(x)>0$, atunci funcția este strict crescătoare pe I.
   - Dacă $\forall x\in I$, avem $f'(x)<0$, atunci funcția este strict descrescătoare pe I.
2. Fie $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ o funcți derivabilă şi $\boldsymbol{c}\in(a,b)$. Dacă f' se anulează în c schimbându-şi semnul, atunci c este un punct de extrem local pentru f.

Teoremă. Dacă funcția f este continuă şi derivabilă pe I (I – interval deschis), atunci:

1. între două rădăcini consecutive ale funcției există cel puțin o rădăcină a derivatei;
2. între două rădăcini consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcției.

Teorema lui Cauchy:

Dacă $f,g:[a,b]\to$R continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b) şi $g'(x)\neq0$, $\forall x\in(a,b)$ atunci $\exists c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Funcții convexe şi funcții concave

1. O funcție este convexă pe un interval real (a,b), dacă pentru $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ graficul funcției pe intervalul (x_1,x_2) este situat sub segmentul de dreaptă care uneşte punctele $(x_1,f(x_1))$ şi $(x_2,f(x_2))$.
2. O funcție este concavă pe un interval real (a,b), dacă pentru $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ graficul funcției pe intervalul (x_1,x_2) este situat desupra segmentului de dreaptă care uneşte punctele $(x_1,f(x_1))$ şi $(x_2,f(x_2))$.

Propoziția

1. Dacă funcția f are derivată de ordinul al doilea strict pozitivă ($f'(x)>0$) pe intervalul (a,b), atunci f este strict convexă pe (a,b).
2. Dacă funcția f are derivată de ordinul al doilea strict negativă ($f'(x)<0$) pe intervalul (a,b), atunci f este strict concavă pe (a,b).

Asimptote

1. Asimptote orizontale (f:$D\to\mathbf{R}$)

Definiția 1. Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l_1$ sau $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l_2$, $l_1\in\mathbf{R}$ şi/sau $l_2\in\mathbf{R}$, dreptele $y=l_1$ şi/sau $y=l_2$ sunt **asimptote orizontale** a lui f spre **+∞,** respectiv **–∞**

2. Asimptote oblice (f:$D\to\mathbf{R}$)

Definiția 2. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m\neq 0$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=n, m,n\in R$ dreapta $y=mx+n$ este **asimptotă oblică** a lui f spre **+∞.**

Definiția 3. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m'\neq 0$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-m'x]=n', m',n'\in R$ dreapta $y=m'x+n'$ este **asimptotă oblică** a lui f spre **-∞.**

3. Asimptote verticale (f:$D\to\mathbf{R}$)

Definiția 4. Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} f(x)=\pm\infty$, α **-** punct de acumulare a lui D, dreapta $x=\alpha$ este **asimptotă verticală la stânga** a lui f.

Definiția 5. Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} f(x)=\pm\infty$, α **-** punct de acumulare a lui D**,** dreapta $x=\alpha$ este **asimptotă verticală la dreapta** a lui f.

Regulile lui l'Hospital

Fie I un interval pe axa reală şi x_0 un punct de acumulare al lui I. Fie f şi g două funcții definite pe $I-\{x_0\}$. Dacă:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

2. f şi g sunt derivabile pe $I-\{x_0\}$;

3. $g'(x_0)\neq 0,\ \forall x\in I\setminus\{x_0\}$;

4. există $\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f'(x_0)}{\lim\limits_{x\to x_0} g'(x_0)}=l, l\in\mathbf{R}$, atunci

a) $g(x)\neq 0,\ \forall x\in I\setminus\{x_0\}$ şi

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$.

Probleme rezolvate

1. Se consideră funcţia f:$\mathbf{R}\backslash\{-1\}\to\mathbf{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei f.
b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.
c) Să se demonstreze că $f(x)\le -4$ pentru orice $x<-1$.

R. a) Funcţia este derivabilă pe domeniul de definiţie deoarece este o funcţie raţională. Folosind formula de derivare a unui cât de funcţii derivabile, pentru orice $x\ne -1$ avem

$$f'(x)=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x+1\right)-x^2\cdot\left(x+1\right)'}{\left(x+1\right)^2}=\frac{2x\left(x+1\right)-x^2\cdot 1}{\left(x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2}{\left(x+1\right)^2}=\frac{x^2+2x}{\left(x+1\right)^2}.$$

b) Monotonia funcţiei f este dată de semnul derivatei f'. Cum numitorul $(x+1)^2$ este pozitiv pentru orice x din domeniu, semnul lui $f'(x)$ este dat de semnul funcţiei de gradul doi x^2+2x.

Rezolvăm ecuaţia $x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$ şi găsim rădăcinile $x_1=-2$ şi $x_2=0$. Tabelul de semn al derivatei:

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
x^2+2x	+ + + + + + +0 − − − − − − 0 + + + + + +
$(x+1)^2$	+ + + + + + 0 + + + + + + + + + + + + +
$f'(x)$	+ + + + + 0 − − / − − − 0 + + + + + +
$f(x)$	$\nearrow$ *Max* $\searrow$

- pe intervalul $(-4;-2)$, avem $x^2+2x>0$, deci $f'(x)>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-4;-2]$.
- pe intervalul $(-2;-1)$, avem $x^2+2x<0$, deci $f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $[-2;-1)$.
- pe intervalul $(-1;0)$, avem $x^2+2x<0$, deci $f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-1;0]$.
- pe intervalul $(0;+4)$, avem $x^2+2x>0$, deci $f'(x)>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0;+4)$.

c) Conform punctului **b)**, f în intervalul $(-4;-1)$ are un maxim, punctul $x=-2$. Deci $f(x)\le f(-2)=-4$, pentru orice $x<-1$.

2. Se consideră funcţia f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x-e^{-x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.
b) Să se arate că funcţia f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.
c) Să se calculeze $S=g(0)+g(1)+\ldots+g(2008)$, unde g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f'(x)-f''(x)$.

R. a) Punctul $x_0=0$ este punct de acumulare pentru $\mathbf{R}$ şi limita este

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'\left(0\right)$. Calculăm $f'(x)=e^x+e^{-x}$, unde

$\left(e^{-x}\right)'=e^{-x}\cdot(-x)'=e^{-x}\cdot(-1)=-e^{-x}$ după formula de derivare $\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'$ şi

$f'(0)=e^{0}+e^{0}=1+1=2$, deci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2$.

b) În $f'(x)=e^{x}+e^{-x}$ avem e^{x} şi e^{-x} sunt strict pozitive $\forall x\in\mathbf{R}$, atunci şi suma lor $f'(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$ şi funcţia este crescătoare pe domeniul de definiţie, **R.**

c) Deoarece $f''(x) = e^{x} - e^{-x}$, avem $g(x) = f'(x) - f''(x) = 2e^{-x}$. Atunci suma S din enunţ este suma primilor 2009 termeni ai unei progresii geometrice de prim termen $g(0) = 2e^{-0} = 2$ şi raţie $e^{-1}<1$, $\left(S_n=b_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\right)$. Deci, $S = g(0) + g(1) +\ldots + g(2008)=$

$=2+2e^{-1}+2e^{-2}+\ldots+2e^{-2008}=2\cdot\frac{1-e^{-2009}}{1-e^{-1}}=\frac{2(e^{2009}-1)}{e^{2008}(e-1)}$.

3. Se consideră funcţia f: $(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se calculeze derivata funcţiei f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

R.a) Folosind formula de derivare a unui cât, avem:

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

b) Determinăm punctele critice: $f'(x)=0\Leftrightarrow 2-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$; $x\in(0,+\infty)\Rightarrow x>0$ şi $\sqrt{x}>0$

Tabelul de semn:

x	0			e^2					$+\infty$
2-ln$x$	+	+	+	0	–	–	–	–	–
$2x\sqrt{x}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	0	–	–	–	–	–

Pe intervalul $(0,e^2)$, $f'(x)>0$, atunci f este funcţie strict crescătoare pe acest interval.
Pe intervalul $(e^2,+\infty)$, $f'(x)<0$, atunci f este funcţie strict descrescătoare pe acest interval.

c) Din $e\approx 2,71\Rightarrow e^2>2,7^{\,2}=7,29$ şi atunci $0<3<5<e^2$, adică 3 şi $5\in(0,e^2)$, interval pe care funcţia este strict crescătoare (punctual **b**). Avem: $3<5\Rightarrow f(3)<f(5)\Rightarrow\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\frac{\ln 5}{\sqrt{5}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{5}\ln 3<\sqrt{3}\ln 5\Rightarrow \ln 3^{\sqrt{5}}<\ln 5^{\sqrt{3}}$ şi funcţia logaritm natural fiind strict crescătoare se păstrează inegalitatea şi între argumente, adică $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

4. Se consideră funcţia f:**R**→**R**, $f(x) = x + e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se arate că f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ şi crescătoare pe $[0,+\infty)$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

R. **a)** Folosind regula de derivare a sumei obținem $f\,'(x)=1-e^{-x}$.

b) Pentru determinarea monotoniei folosim semnul derivatei întâi. Pentru tabelul de semn al derivatei determinăm punctele critice: $f\,'(x)=0 \Rightarrow 1-e^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}=1 \Rightarrow x=0$.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f\,'(x)$	- - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + +

Pe intervalul $(-\infty,0]$, $f\,'(x)<0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare pe $(-\infty,0]$;

Pe intervalul $[0,+\infty)$, $f\,'(x)>0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare pe $[0,+\infty)$.

c) Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m\neq 0,\ m\in\mathbf{R}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=n,\ n\in\mathbf{R}$ dreapta $\boldsymbol{y=mx+n}$ este *asimptotă oblică* spre $+\infty$ la graficul funcției.

Calculăm $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\substack{\text{regula lui}\\ \text{l'Hospital}}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\,'(x)}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{1}\underset{e^{-x}\to 0}{=}1$ și

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+e^{-x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0.$$

Ecuația asimptotei oblice: $y=1\cdot x+0 \Rightarrow y=x$ (prima bisectoare).

5. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{2009}-2009(x-1)-1$.

a) Să se calculeze $f(0)+f\,'(0)$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $[0;+\infty)$.

R.a) Calculăm $f\,'(x)=2009x^{2008}-2009$; $f(0)=0^{2009}-2009(0-1)-1=2009-1=2008$ și $f\,'(0)=2009\cdot 0^{2008}-2009=-2009$. Răspunsul $f(0)+f\,'(0)=2008-2009=-1$

b) Ecuația tangentei la graficul funcției este $y-f(x_0)=f\,'(x_0)(x-x_0)$, unde $x_0=0$, $f(x_0)=f(0)=2008$ și $f\,'(0)=2008\cdot 0^{2007}-2008=-2008$. Prin înlocuire se obține: $y-2008=-2008(x-0) \Rightarrow y=-2008x+2008$.

c) Calculăm derivata a doua $f\,''(x)=(f\,'(x))'=\left(2009x^{2008}-2009\right)'=2009\cdot 2008x^{2007}$.

Deoarece $x^{2007}\geq 0$, $\forall x\in\mathbf{R} \Rightarrow f\,''(x)\geq 0$ și atunci f este convexă pe $\mathbf{R}$.

6. Se consideră funcția f: $[0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b) Să se verifice că $f\,'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x\geq 0$.

c) Să se demonstreze că $\frac{1}{2}\leq f(x)<2$ pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

R.a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1+1=2$

b) Aplicăm regula de derivare a sumei și câtului și avem:

$$f\,'(x)=\frac{x'\cdot(x+1)-x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}+\frac{(x+1)'\cdot(x+2)-(x+1)\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}+$$

$$+\frac{1\cdot(x+2)-(x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}+\frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$$

c) Pentru demonstrarea inegalității utilizăm monotonia funcției. Monotonia se stabileşte cu ajutorul primei derivate. Se observă că $f'(x)>0$ ca sumă de pătrate, $\forall x\in[0,+\infty]$ şi atunci funcția este crescătoare pe domeniul de definiție, adică $0\le x<+\infty \Rightarrow f(0)\le f(x)<\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Calculăm $f(0)=\frac{0}{0+1}+\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}$ şi din punctul **a)** avem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Înlocuind se obține $\frac{1}{2}\le f(x)<2$.

7. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x+x^2$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) Să se demonstreze că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

R. a) Din definiția derivatei funcției în punctul de acumulare $x_0=1$ se obține $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$. Calculăm $f'(x)=e^x+2x$ şi $f'(1)=e^1+2\cdot1=e+2$. Se obține $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e+2$.

b) Către $+\infty$ funcția poate să aibă asimptotă orizontală sau oblică.

Verificăm asimptota orizontală:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=\infty+\infty=\infty \Rightarrow$ nu are asimptotă orizontală.

Verificăm asimptota oblică:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty} x=\infty+\infty=\infty \Rightarrow$ nu are asimptota oblică.

c) Pentru determinarea convexității ne folosim de derivata de ordinul II.

$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(e^x+2x\right)'=\left(e^x\right)'+\left(2x\right)'=e^x+2$. Din $e^x>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, obținem $f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$ şi $\Rightarrow$ funcția este convexă pe **R.**

8. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\setminus\{e\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

b) Să se verifice că $f'(x)=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$, $\forall x\in(0,\infty)\setminus\{e\}$.

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

R. a) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)=\frac{1+\ln1}{1-\ln1}=\frac{1+0}{1-0}=1$.

b) Avem: $f'(x)=\frac{(1+\ln x)'\cdot(1-\ln x)-(1+\ln x)\cdot(1-\ln x)'}{(1-\ln x)^2}=$

$$=\frac{\left(0+\frac{1}{x}\right)\cdot(1+\ln x)-(1+\ln x)\cdot\left(0-\frac{1}{x}\right)}{(1-\ln x)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x}-\cancel{\frac{\ln x}{x}}+\frac{1}{x}+\cancel{\frac{\ln x}{x}}}{\left(1-\ln x\right)^2}=\frac{\frac{2}{x}}{\left(1-\ln x\right)^2}=\frac{2}{x\left(1-\ln x\right)^2}.$$

c) Calculăm $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{1-\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{l'Hospital}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\ln x\right)'}{\left(1-\ln x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}}=-1$ şi

obținem asimptota orizontală, dreapta y= −1.

9. Se Se consideră funcția f: **R**→**R** definită prin $f(x)= e^x(ax^2+bx + c)$, unde $a,b,c\in$**R**.

a) Pentru a=1,b=c= 0, să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.

b) Să se verifice că $f\,'(0) - f(0) = b$.

c) Să se determine $a,b,c\in$**R**, astfel încât $f(0) = 0, f\,'(0) = 1$ şi $f\,''(0) = 4$.

R. a) Pentru a=1,b=c= 0, $f(x)=e^xx^2$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x x^2=+\infty\cdot\left(+\infty\right)=+\infty$.

b) Calculăm:

$$f\,'\left(x\right)=\left(e^x\right)'\left(ax^2+bx+c\right)+e^x\left(ax^2+bx+c\right)'=e^x\left(ax^2+bx+c\right)+e^x\left(2ax+b\right)=$$
$$=e^x\left(ax^2+bx+c+2ax+b\right)=e^x\left[ax^2+x\left(2a+b\right)+b+c\right]$$

$f(0) = e^0(a\cdot 0 + b\cdot 0 + c) = 1\cdot c = c$ şi $f\,'(0) = e^0[a\cdot 0 + 0\cdot(2a + b) + b + c] = b + c.$

Obținem: $f\,'(0) - f(0) = b + c - c = b.$

c) Calculăm $f\,''(x)=\left[e^x\left(ax^2+bx+c+2ax+b\right)\right]'=\left(e^x\right)'\left(ax^2+bx+c+2ax+b\right)+$

$+e^x\left(ax^2+bx+c+2ax+b\right)'=$

$=e^x\left(ax^2+bx+c+2ax+b\right)+e^x\left(2ax+b+2a\right)=e^x\left(ax^2+4ax+bx+2a+2b+c\right)$ şi

$f(0)=e^0(a\cdot 0+b\cdot 0+c) = c; f\,'(0)= b+c; f\,''(0) = 2a + 2b + c.$ Obținem sistemul:

$$\begin{cases}c=0\\ b+c=1\\ 2a+2b+c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ b+0=1\\ 2a+2+0=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ b=1\\ 2a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ b=1\\ a=1\end{cases}$$ cu soluția a=b=1 şi c=0.

10. Se Se consideră funcția f:**R**→**R**, $f(x)=\begin{cases}x^2-x, x\geq 1\\ -x^2+x, x<1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

b) Să se calculeze $f\,'(0) + f\,'(2)$.

c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe $(-\infty,1)$.

R. a) Folosim definiția funcției continue şi calculăm limitele laterale în punctul x_0=1.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(-x^2+x\right)=-1^2+1=-1+1=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(x^2-x\right)=1^2-1=1-1=0$$

şi $f(0)=1^2-1=0$.

Din $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=f(1)=0$ rezultă că funcția este continuă în x_0=1.

b) Calculăm $f'(x)=\begin{cases}2x-1, & x>1\\ -2x+1, & x<1\end{cases}$, f este derivabilă pe (-∞1,)∪(1,+∞)

$f'(0)=-2\cdot0+1=1$ şi $f'(2)=2\cdot2-1=3$. Obţinem: $f'(0)+f'(2)=1+3=4$.

c) Calculăm derivata a doua a funcţiei pe intervalul $(-\infty,1)$. $f''(x)=(-2x+1)'=-2<0$ şi funcţia este concavă pe $(-\infty,1)$.

11. Se consideră funcţia f: $(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{(x+1)^3}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

b) Să se demonstreze că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3 f'(x)$.

R. a) Derivăm fiecare fracţie:

$$f'(x)=\frac{1'\cdot x^2-1\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}+\frac{1'\cdot(x+)^2-1\cdot\left[(x+)^2\right]'}{\left[(x+1)^2\right]^2}=\frac{0\cdot x^2-1\cdot 2x}{x^4}+$$

$$+\frac{0\cdot(x+)^2-1\cdot2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4}=\frac{-2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}}+\frac{-2\cancel{(x+1)}\cdot1}{(x+1)^{\cancel{4}3}}=-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{(x+1)^3}.$$

b) Pentru determinarea monotoniei funcţiei determinăm semnul derivatei:

$$x\in(0,+\infty)\Rightarrow\begin{cases}x^3>0\Rightarrow\frac{2}{x^3}>0\Rightarrow-\frac{2}{x^3}<0\\(x+1)^3>0\Rightarrow-\frac{2}{(x+1)^3}<0\end{cases}$$

şi atunci $f''(x)<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) $$\lim_{x\to+\infty}x^3f'(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{(x+1)^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}-\frac{2x^3}{(x+1)^3}\right)=.$$

$$=-2-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3+3x^2+3x+1}=-2-2=-4$$

12. Se consideră funcţia f : $(0,+\infty)\to\mathbf{R}$. definită prin $f(x)=x-2\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq\ln\frac{e^2}{4}$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

R. a) $f'(x)=x'-2(\ln x)'=1-2\cdot\frac{1}{x}=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$.

b) Pentru stabilirea convexităţi determinăm semnul derivatei a II-a.

$f''(x)=\left(1-\frac{2}{x}\right)'=1'-2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=0-2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{x^2}$, care evident este pozitivă pe domeniul de definiţie. Din $f''(x)>0\Rightarrow f$ este convexă pe $(0,+\infty)$.

c) Pentru demonstrarea inegalității stabilim monotonia funcției.

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-\dfrac{2}{x}=0 \Rightarrow \dfrac{2}{x}=1 \Rightarrow x=2$, punct critic.

Tabelul de semn al derivatei:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		- - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + +	

Pe $(0;2]$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare, iar pe $[2,+\infty)$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare, atunci $x = 2$ este punct de minim local $\Rightarrow f(x)\ge f(2)$. Calculăm

$f(2)=2-2\ln 2=2\cdot \ln e-\ln 2^2=\ln e^2-\ln 4=\ln\dfrac{e^2}{4}$, obținem: $f(x)\ge \ln\dfrac{e^2}{4}$.

13. Se consideră funcția f: $\mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$ oricare ar fi $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că $f(x)\ge 1$, pentru orice $x>-1$.

R. a) Calculăm derivata după regula de derivare a funcției cât.

$$f'(x)=\frac{(e^x)'(x+1)-e^x(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{e^x(x+1)-e^x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{e^x(x+\cancel{1}-\cancel{1})}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

b) Calculăm $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}(x+1)}=\dfrac{1}{+\infty\cdot-\infty}=\dfrac{1}{-\infty}=0$ şi atunci dreapta

y=0 este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

c) Pentru demonstarea inegalității ne folosim de monotonia funcției f care este dată de semnul derivatei f'. Determinăm punctele critice, $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ şi tabelul de semn al derivatei pe intervalul $(-1,+\infty)$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-------$	0	+ + + ++ + + + + + + +	

Pe intervalul $(-1,0]$, $f'(x)\le 0\Rightarrow f$ este funcție descrescătoare, iar pe $[0,+\infty)$, $f'(x)\ge 0\Rightarrow f$ este funcție crescătoare, atunci $x=0$ este punct de minim local $\Rightarrow f(x)\ge f(0)$. Calcuăm

$f(0)=\dfrac{e^0}{0+1}=\dfrac{1}{1}=1$ şi se obține inegaliatea cerută, $f(x)\ge 1$.

14. Se consideră funcția f : $(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(e)$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcției f.

c) Să se demonstreze că $x^e\le e^x$ pentru orice $x>0$.

R. a) Calculăm derivata funcției $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

iar $f'(e)=\dfrac{1-\ln e}{e^2}=\dfrac{1-1}{e^2}=\dfrac{0}{e^2}=0$.

b) Calculăm $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{l'Hospital}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ şi atunci dreapta y=0 este asimptotă orizontală spre +∞.

c) Pentru demonstarea inegalității ne folosim de monotonia funcției f care este dată de semnul funcției f'. Determinăm punctele critice, $f'(x)=0 \Rightarrow 1-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$ şi tabelul de semn al derivatei pe intervalul $(0,+\infty)$

x	0 $\qquad$ e $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + 0 - - - - - - - - - - - - - - - -

Pe intervalul $(0,e]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare, iar pe $[e,+\infty)$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare, atunci $x = e$ este punct de maxim local

$$\Rightarrow f(x) \leq f(e) \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e} \Rightarrow e\ln x \leq x \ln e \overset{\text{prop.f. logaritm}}{\Rightarrow} \ln x^e \leq \ln e^x \Rightarrow x^e \leq e^x \text{ pentru orice } x > 0.$$

15. Se consideră funcțiile $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, date prin $f_0(x) = e^{-x} - 1$ şi $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$ pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

a) Să calculeze $f_1(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către +∞ a graficului funcției f_0 .

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\frac{f_2(x)+x-1}{x^2}$.

R. a) Determinăm $f_1(x)$ pentru $n=0$:

$$f_1(x) = f_0'(x) = \left(e^{-x}-1\right)' = \left(e^{-x}\right)' - 1' = (-x)' \cdot e^{-x} - 0 = -1\cdot e^{-x} = -e^{-x}.$$

b) Calculăm $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} - 1 = \frac{1}{+\infty} - 1 = 0-1 = -1$ şi obținem asimptota orizontală dreapta $y = -1$.

c) Calculăm mai întâi, pentru $n = 1$,

$$f_2(x) = f_1'(x) = \left(-e^{-x}\right)' = (-x)'\cdot\left(-e^{-x}\right) = -1\cdot\left(-e^{-x}\right) = e^{-x} \text{ şi}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f_2(x)+x-1}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{l'Hospital}{=} \lim_{x\to0}\frac{\left(e^{-x}+x-1\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to0}\frac{-e^{-x}+1}{2x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{l'Hospital}{=} \lim_{x\to0}\frac{\left(-e^{-x}+1\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to0}\frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}.$$

16. Se consideră funcția f: **R** → **R** de forma $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x<0 \\ x^2+x+a, & x\geq 0 \end{cases}$, unde $a\in\mathbf{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă −1.

c) Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0; +\infty)$, oricare ar fi $a\in\mathbf{R}$.

R. a) Calculăm limitele laterale în x_0:

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(e^x - 1\right) = e^0 - 1 = 1-1 = 0$$

$$l_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2 + x + a\right) = 0^2 + 0 + a = a$$

Pentru ca funcția să fie continuă în $x_0=0$ trebuie ca $l_s(0)=l_d(0) \Rightarrow a=0$.

b) Ecuația tangentei la graficul funcției este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$, unde $x_0 = -1<0$ şi funcția este $f(x)=e^x-1$. Calculăm $f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1$, $f'(x) = \left(e^x - 1\right)' = \left(e^x\right)' - 1' = e^x$,

$f'(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, înlocuim şi se obține: $y - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1}{e}(x+1) \Rightarrow y - \frac{1}{e} + 1 = \frac{(x+1)}{e}\Big| \cdot e \Rightarrow$

$ye - 1 + e = x + 1 \Rightarrow\ t: x - ye + 2 - e = 0$.

c) Pe $(0; +\infty)$, $f(x) = x^2 + x + a$ şi funcția f' este crescătoare dacă f'' este pozitivă. Calculăm $f'(x) = 2x + 1$ şi $f''(x) = 2 > 0$, $\forall a \in \mathbf{R}$, atunci funcția f' este funcție crescătoare. (Sau $f'(x) = 2x+1$, funcție de gradul I, cu coeficientul lui x egal cu $2 > 0$ şi atunci este crescătoare).

17. Se consideră funcția $f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.

b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe $(0,2]$.

c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \le 3e^{\sqrt{2}}$.

R. a) Derivăm după cât :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' \cdot x^2 - e^x \cdot \left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x \cdot \cancel{x} \cdot (x - 2)}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}.$$

b) Determinăm semnul derivatei pe intervalul $(0,2]$: $x>0 \Rightarrow e^x>0$, $x^3>0$ şi $x-2 \le 0$ atunci $f'(x) \le 0$ şi $\Rightarrow f$ este funcție descrescătoare.

c) Pentru demonstrarea inegalității ne folosim de punctual **b)**. Funcția este descrescătoare, adică $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$. Din intervalul $(0,2]$ luăm numerele $\sqrt{2} \le \sqrt{3}$ şi obținem:

$$\frac{e^{\sqrt{2}}}{2} \ge \frac{e^{\sqrt{3}}}{3} \Rightarrow 2e^{\sqrt{3}} \le 3e^{\sqrt{2}}.$$

18. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2$.

a) Să se verifice că $f'(x) = 4x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

R. a) Ridicăm la putere: $f(x)=x^2+2x+1+x^2-2x+1=2x^2+2$ şi apoi derivăm $f'(x)=2\cdot 2x+0=4x$.

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{2}{x^2}\right) = 2 + 0 = 2$.

c) Determinăm $g(x)=\dfrac{4x}{2x^2+2}$ şi calculăm derivata

$$g'(x)=\left(\frac{4x}{2x^2+2}\right)'=\frac{(4x)'(2x^2+2)-4x(2x^2+2)}{(2x^2+2)^2}=\frac{4(2x^2+2)-4x\cdot 4x}{(2x^2+2)^2}=\frac{8x^2+8-16x^2}{(2x^2+2)^2}=$$

$=\dfrac{-8x^2+8}{(2x^2+2)^2}=\dfrac{-8(x^2-1)}{(2x^2+2)^2}$. Punctele critice: $g'(x)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$, tabel de semn:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-\,-\,-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+\,+\,+$	0	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$	

Pe $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, $g'(x)\le 0 \Rightarrow g$ este descrescătoare, iar pe $[-1,1]$ $g'(x)\ge 0$ şi g este crescătoare.

19. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
c) Să se demonstreze că $0<f(x)\le\dfrac{1}{2e}$ pentru orice $x\in\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

R. a) Folosim regula de derivare a câtului

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x^2-\ln x\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot x^{\cancel{2}\,1}-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{x-2x\cdot\ln x}{x^4}=\frac{\cancel{x}(1-2\ln x)}{x^{\cancel{4}\,3}}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{l'Hospital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

c) Determinăm monotonia funcției f. Aflăm punctele critice: $f'(x)=0$

$$\Rightarrow\frac{1-2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow 1-2\ln x=0\Rightarrow 2\ln x=1\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

Tabelul de semn

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	0	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$	

Obținem: f este descrescătoare pe intervalul $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$, adică $\sqrt{e}\le x<+\infty\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<f(x)\le f(\sqrt{e})\Rightarrow 0<f(x)\le\dfrac{1}{2e}$, unde $f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ln\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=\dfrac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e}=\dfrac{\frac{1}{2}\ln e}{e}=\dfrac{1}{2e}$.

20. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in[0,1]$.
b) Să se arate că f este funcție crescătoare pe $[0,1]$.

c) Să se demonstreze că $\frac{3}{e} \le \frac{1}{f(x)} \le 2$, pentru orice $x \in [0,1]$.

R. a) Calculăm după regula de derivare a câtului

$$f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot (x+2) - e^x \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{e^x \cdot (x+2) - e^x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{e^x \cdot (x+2-1)}{(x+2)^2} = \frac{e^x \cdot (x+1)}{(x+2)^2}.$$

b). Determinăm monotonia funcției pe intervalul [0,1]. Se observă că $f'(x) \ge 0$ deoarece sunt numai valori pozitive şi atunci funcția este crescătoare pe [0,1].

c) Conform definiției monotoniei funcție, avem: $0 \le x \le 1 \Rightarrow f(0) \le f(x) \le f(1)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{e}{3}$ şi inversând rapoartele se obține $\frac{3}{e} \le \frac{1}{f(x)} \le 2, \forall x \in [0,1]$.

21. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \ge 8$, oricare ar fi x >1.

R. a) Calculăm după regula de derivare a câtului

$$f'(x) = \frac{(x^2+x+2)' \cdot (x-1) - (x^2+x+2) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(2x+1) \cdot (x-1) - (x^2+x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + \cancel{x} - 1 - x^2 - \cancel{x} - 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}.$$

b) Deoarece gradul numărătorului este 2 iar gradul numitorului 1, funcția nu are asimptotă orizontală şi atunci poate avea asimptotă oblică de forma $y=mx+n$, unde

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2+x+2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+2}{x^2-x} = 1,$$ deoarece numărătorul şi numitorul au grade egale, iar

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+x+2}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+2-x \cdot (x-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+2-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+2}{x-1} = 2.$$

Asimptota oblică va avea forma $y=x+2$.

c) Notăm $h:(1,+\infty) \to \mathbf{R}$,

$$h(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+x+2}{x-1} - \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{x^2+x+2}{x-1} - \frac{2x^2+x+1}{x(x-1)} =$$

$$=\frac{x^3+x^2+2x+2x^2+x^2+1}{x(x-1)}=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x(x-1)}=\frac{(x+1)^3}{x^2-x}$$ şi calculăm

$$h'(x)=\frac{\left[(x+1)^3\right]'(x^2-x)-(x+1)^3(x^2-x)'}{(x^2-x)^2}=\frac{3(x+1)^2(x^2-x)-(x+1)^3(2x-1)}{(x^2-x)^2}=$$

$$=\frac{(x+1)^2(3x^2-3x-2x^2-2x+x+1)}{(x^2-x)^2}=\frac{(x+1)^2(x^2-4x+1)}{(x^2-x^2)}$$. Determinăm punctele critice pe intervalul (1,+∞): $h(x) = 0 \Rightarrow$

$x^2-4x+1=0 \Rightarrow \Delta=16-4=12,\ \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3},\ x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$. Dintre acestea $x_2=2+\sqrt{3}>1$ şi tabelul de semn:

x	1	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$
$h'(x)$	$- - - - - - - -$	0	$+ + + + + + + + +$

Punctul $x=2+\sqrt{3}$ este punct de minim local,

$$h(x)\geq h\left(2+\sqrt{3}\right)=\frac{\left(2+\sqrt{3}+1\right)^3}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2-2-\sqrt{3}}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^3}{4+4\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}}=\frac{27+27\sqrt{3}+27+3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{54+30\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}=\frac{6\left(9+5\sqrt{3}\right)\left(5-3\sqrt{3}\right)}{25-27}=\frac{\cancel{6}^3\left(45-27\sqrt{3}+25\sqrt{3}-45\right)}{-\cancel{2}^2}=6\sqrt{3}\geq 8$$, adică

$h(x)\geq 8 \Rightarrow f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\geq 8$.

22. Se consideră funcţia f: $(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = x - e\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)}{f'(x)}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

R.a) $f'(x)=x'-(e\ln x)'=1-e(\ln x)=1-e\cdot\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x}$.

b) $$\lim_{x\to e}\frac{f(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to e}\frac{x-e\ln x}{\frac{x-e}{x}}=\lim_{x\to e}\frac{x^2-ex\ln x}{x-e}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{l'Hospital}{=}\lim_{x\to e}\frac{(x^2-ex\ln x)'}{(x-e)'}=$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{(x^2)'-e(x\ln x)'}{x'-e'}=\lim_{x\to e}\frac{2x-e\left[x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'\right]}{1-0}=\lim_{x\to e}\frac{2x-e\left(1\cdot\ln x+\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{2x-(e\ln x+e)}{1}=2e-e\ln e-e=2e-e-e=0.$$

c) Determinăm punctele critice, $f'(x)=0$, $\frac{x-e}{x}=0\Rightarrow x-e=0\Rightarrow x=e$ şi tabelul de semn

x	0 $\qquad$ e $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - 0 + + + + + + + + +

Pe $(0,e]$, $f'(x)\le 0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare, iar pe $[e,+\infty)$, $f'(x)\ge 0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare.

23. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = (x^2-2x+1)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1\right)$.

R. a) Se calculează derivata după regula produsului

$$f'(x)=\left(x^2-2x+1\right)'\cdot e^x+\left(x^2-2x+1\right)\cdot\left(e^x\right)'=\left(2x-2\right)\cdot e^x+\left(x^2-2x+1\right)\cdot\left(e^x\right)=$$

$$=\left(2x-2+x^2-2x+1\right)\cdot e^x=\left(x^2-1\right)\cdot e^x.$$

b) Determinăm punctele critice, $f'(x)=0$ şi din tabelul de semn aflăm punctele de extrem.

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x_{1,2}=\pm1$$

x	$-\infty$ $\qquad$ -1 $\qquad$ $+1$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + 0 − − − − 0 + + + + + +

Pe $(+\infty,-1]$, $f'(x)\ge 0\Rightarrow f$ este funcție crescătoare, iar pe $[-1,+1]$, $f'(x)\le 0\Rightarrow f$ este funcție descrescătoare şi atunci x = −1 punct de maxim local. Pe $[-1,+1]$, $f'(x)\le 0\Rightarrow f$ este funcție descrescătoare, iar pe $[+1,+\infty)$, $f'(x)\ge 0\Rightarrow f$ este funcție crescătoare şi atunci x=+1 este punct de minim local. Funcția are două puncte de extreme local, x = −1 şi x = +1.

c)
$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\left(x^2-1\right)\cancel{e^x}}{\left(x^2-2x+1\right)\cancel{e^x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x^2-1-x^2+2x-1}{x^2-2x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{2x-2}{x^2-2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x}{x^2-2x+1}=2.$$

sau
$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{(x-1)(x+1)\cdot e^x}{(x-1)^2\cdot e^x}-1\right)=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{2}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}=2.$$

24. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

c) Să se demonstreze că $\ln\sqrt{x}\le\dfrac{x^2-1}{4}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

R. a) $f'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'-(\ln x)'=\frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}}-\frac{1}{x}=x^3-\frac{1}{x}=\frac{x^4-1}{x}$.

b) Aflăm punctele critice, $f'(x)=0$,

$\frac{x^4-1}{x}=0\Rightarrow x^4-1=0\Rightarrow(x^2-1)(x^2+1)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm1$, dar $x_1=-1$ nu este în domeniul de definiție al funcției și atunci punct critic este x=1. În tabelul de semn contează numai semnul expresiei x^2-1:

x	-∞ -1 0 +1 +∞
x^2-1	+ + + + + + + 0 - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + +
$f'(x)$	/ / / / / / / / / / / / / / / / / / - - - - 0 + + + + + + + + + +

Pe intervalul (0,1], $f'(x)\le0\Rightarrow f$ este descrescătoare, iar pe $[1,+\infty)$ $f'(x)\ge0\Rightarrow f$ este crescătoare şi atunci x=1 este punct de extrem.

c) Inegalitatea se mai poate scrie:

$\ln\sqrt{x}\le\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\ln\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\le-\frac{1}{4}\Big|\cdot(-1)\Leftrightarrow\frac{x^2}{4}-\ln\sqrt{x}\ge\frac{1}{4}$, ceea ce ne arată că se compară $f(\sqrt{x})$ cu $f(1)$. Din monotonia funcție de la pct.**b)** avem funcția crescătoare pe $[1,+\infty)$, adică $\sqrt{x}\ge1\Rightarrow f(\sqrt{x})\ge f(1)\Rightarrow\frac{x^2}{4}-\ln\sqrt{x}\ge\frac{1}{4}$, care este inegalitatea de demonstrat.

25. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=e^x-x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că $f(x)\ge1$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

c) Să se scrie ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției f.

R. a) $f'(x)=(e^x)'-x'=e^x-1$.

b) Determinăm monotonia funcției şi punctele de extreme.

$f'(x)=0\Rightarrow e^x-1=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$. Tabelul de semn:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - 0 + + + + + + +
$f(x)$	↘ m ↗

x=0 punct de minim pentru f, adică $f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge e^0-1=1$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

c) Ecuația asimptotei oblice este $y=mx+n$, unde

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{xe^{-x}}-1\right)=\frac{1}{\infty}-1=0-1=-1$, iar

$n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x-(-1)\cdot x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-\cancel{x}+\cancel{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=\frac{1}{\infty}=0$ şi asimptota oblică către $-\infty$ la graficul funcției va fi $y=-1\cdot x+0\Rightarrow y=-x$.

26. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=e^x-x-1$.

a) Să se calculeze derivata funcției f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se arate că $e^{x^2}+e^x\ge x^2+x+2$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

R. a) $f'(x)=\left(e^x\right)'-x'-1'=e^x-1$

b) Determinăm monotonia funcției. Punctele critice $f'(x)=0\Rightarrow e^x-1=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$. Tabelul de semn:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - -	0	+ + + + + + +
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$

Pe intervalul $(-\infty,0]$, $f'(x)<0$ $\Rightarrow f$ este descrescătoare, iar pe $[0,+\infty)$, $f'(x)>0$ $\Rightarrow f$ este crescătoare.

c) Din punctul **b)** $\Rightarrow$ punctul de coordinate (0,0) este punct de minim, adică $f(x)\geq 0\Rightarrow$ $e^x-x-1\geq 0$ şi de asemenea $f(x^2)\geq 0\Rightarrow$ $e^{x^2}-x^2-1\geq 0$. Adunăm cele două relații:

$$\left.\begin{array}{l} e^x-x-1\geq 0 \\ e^{x^2}-x^2-1\geq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow e^{x^2}+e^x-x^2-x-2\geq 0\Rightarrow e^{x^2}+e^x\geq x^2+x+2.$$

27. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.
b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.
c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f.

R. a) Se calculează derivata funcției după regula de derivare a câtului

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

b) Pentru studierea monotoniei determinăm punctele critice şi facem tabelul de semn al derivatei. $f'(x)=0\Rightarrow\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow\ln x=1\Rightarrow x=e$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + +	0	- - - - - - - - - -

Pe $(0,e]$, $f'(x)\geq 0$ atunci funcția este crescătoare, pe $[e,+\infty)$, $f'(x)\leq 0$ şi funcția este descrescătoare.

c) Calculăm limita la $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{l'Hospital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$ şi atunci dreapta $y=0$, (axa Ox) este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

28. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}\cdot e^x-1, & x\leq 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=1$.
b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.
c) Să se arate că funcția f este concavă pe $(1,+\infty)$.

R. a) Pentru determinarea continuității calculăm limitele laterale în punctual $x_0=1$ şi valoarea funcției: $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{1}{e}\cdot e^x-1\right)=\frac{1}{\cancel{e}}\cdot\cancel{e}-1=1-1=0$

$l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\ln x=\ln 1=0$, $f(1)=\frac{1}{\cancel{e}}\cdot\cancel{e}-1=1-1=0$. Avem $l_s(1)=l_d(1)=f(1)=0$ şi atunci funcția este continuă în $x_0=1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\cdot e^x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e^{-x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^{-x+1}}-1\right)=\frac{1}{e^{+\infty}}-1=$

$=\frac{1}{\infty}-1=0-1=-1$ şi dreapta $y=-1$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Pentru determinarea concavității unei funcții ne folosim de derivate a II-a a funcției. Pe intervalul $(1,+\infty)$ funcția este $f(x)=\ln x$ şi atunci $f'(x)=\frac{1}{x},\forall x>1\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{x^2},\forall x>1$ care este negativă deoarece $x^2>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)$. Dacă $f''(x)<0$ atunci funcția este concavă pe $(1,+\infty)$.

29. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

a) Să se arate că $f(1)-f'(1)=1$.

b) Să se determine punctul de extrem al funcției f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{x}$.

R. a) $f(1)=1-\ln 1=1-0=1$, $f'(x)=x'-(\ln x)'=1-\frac{1}{x}$ şi $f'(1)=1-\frac{1}{1}=1-1=0$. Atunci $f(1)-f'(1)=1-0=1$.

b) $x_0=1$ este punct critic şi tabelul de variație la funcției:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	− − − − − −	0	+ + + + + + + + + + + +
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Pe $(0,1]$, $f'(x)\le 0$ şi f este descrescătoare, iar pe $[1,+\infty)$, $f'(x)\ge 0$ şi f este crescătoare, atunci $A(1,1)$ este punct de minim.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x-x}{x}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'H}{=}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$.

30. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+e^x$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$.

R. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ care este derivata funcției în punctul $x_0=0$.

$f'(x)=\left(x^2\right)'+\left(e^x\right)'=2x+e^x$ şi $f'(0)=2\cdot 0+e^0=1$ şi atunci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$.

b) Convexitatea se determină cu ajutorul semnului derivatei a II-a:

$f''(x)=\left(2x+e^x\right)'=2\cdot x'+\left(e^x\right)'=2+e^x$, $f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$ şi atunci f este convexă pe **R.**

c) Înlocuim pe f' şi f'' de la pct.**a)**, respectiv **b)** se obține: $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3\Leftrightarrow$
$2x+e^x-(2+e^x)+x^2+e^x=e^x-3\Leftrightarrow 2x+e^x-2-e^x+x^2+e^x-e^x+3=0\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+1)^2=0\Leftrightarrow x_{1,2}=-1$.

31. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

a) Să se arate că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x\ln x}$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq -\dfrac{1}{2e}$, pentru orice $x>0$.

R. a) $f'(x)=\left(x^2\right)'\ln x+x^2\cdot\ln x=2x\ln x+x^{\cancel{2}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}}=x\left(2\ln x+1\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(2\ln x+1\right)}{\cancel{x}\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2\cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}}+\dfrac{1}{\ln x}\nearrow^{0}\right)=2$.

c) Determinăm monotonia funcției:

$f'(x)=0\Rightarrow \underbrace{x}_{>0}\left(2\ln x+1\right)=0\Rightarrow 2\ln x+1=0\Rightarrow \ln x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$, tabelul de semn

x	0 $\qquad\qquad$ $e^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$ 0 $+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
$f(x)$	$\searrow$ min $\nearrow$

Punctul $x=e^{-\frac{1}{2}}$, $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\ln e^{-\frac{1}{2}}=e^{-1}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2e}$ este punct de minim $\Rightarrow$

$f(x)\geq -\dfrac{1}{2e}$, pentru orice $x>0$.

32. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x}$.

a) Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}$.

c) Să se arate că funcția f este concavă pe **R**.

R. a) $f'(x)=x'-\left(e^{-x}\right)'=1+e^{-x}=1+\dfrac{1}{e^x}$ şi $f(0)+f'(0)=0-\dfrac{1}{e^0}+1+\dfrac{1}{e^0}=-1+1+1=1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\cancel{\frac{1}{e^x}}+1+\cancel{\frac{1}{e^x}}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$.

c) $f''(x)=\left(1+e^{-x}\right)'=-e^{-x}=-\frac{1}{e^x}<0, \forall x\in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este concavă pe **R.**

33. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=1-\frac{2e^x}{x+e^x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $-1\le f(x)\le\frac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x\ge 0$.

R. a)

$$f'(x)=1'-\left(\frac{2e^x}{x+e^x}\right)'=-2\frac{e^x\left(x+e^x\right)-e^x\left(x+e^x\right)'}{\left(x+e^x\right)^2}=-2\frac{e^x\left(x\cancel{+e^x}-1\cancel{-e^x}\right)}{\left(x+e^x\right)^2}=\frac{2(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}.$$

b) Asimptota orizontală $y=l$, $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2e^x}{x+e^x}\right)=1-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x+e^x}=1-2=-1\Rightarrow y=-1$.

c) Determinăm monotonia funcției: $f'(x)=0\Rightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1$, punct de extrem. Tabelul de variație:

x	0	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + + +	0	− − − − − − − − −
$f(x)$	-1 ↗	$\frac{1-e}{1+e}$	↘ -1

$$f(0)=1-\frac{2e^0}{0+e^0}=1-2=-1,\ f(1)=1-\frac{2e^1}{1+e^1}=\frac{1+e-2e}{1+e}=\frac{1-e}{1+e}.$$

$x=-1$ punct de maxim $\Rightarrow 0\le x\le+\infty\Rightarrow -1\le f(x)\le\frac{1-e}{1+e}$.

34. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\left(x^2+2x+3\right)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Să se demonstreze că funcția f' este crescătoare pe **R**.

R. a)

$$f'(x)=\left(x^2+2x+3\right)'e^x+\left(x^2+2x+3\right)\cdot\left(e^x\right)'=e^x\left(2x+2+x^2+2x+3\right)=$$
$$=e^x\left(x^2+4x+5\right).$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\underset{\substack{conf.def.\\derivatei}}{=}f'(0)=e^0\left(0^2+4\cdot 0+5\right)=5$.

c)

$f''(x)=\left(e^x\right)'\left(x^2+4x+5\right)+e^x\left(x^2+4x+5\right)'=e^x\left(x^2+4x+5+2x+4\right)=$
$=e^x\left(x^2+6x+9\right)=e^x\left(x+3\right)^2\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}$ $\Rightarrow f'$ este crescătoare pe **R.**

35. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}-3x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{3\sqrt{x}-6}{2}$, pentru orice $x\in(0;+\infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să e demonstreze că $-4\leq f(x)+f(x^2)\leq 0$, pentru orice $x\in(0;1]$.

R. a) $f'(x)=x'\sqrt{x}+x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'-3x'=\sqrt{x}+\cancel{x}^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}-3\overset{2)}{=}\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\overset{2)}{-}3=\dfrac{3\sqrt{x}-6}{2}$.

b) Semnul derivatei: $f'(x)=0\Rightarrow 3\sqrt{x}-6=0\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$

x	0 4 +∞
$f'(x)$	− − − − − − − − 0 + + + + + + + + + + + +

Pe intervalul (0,4], $f'(x)\leq 0\Rightarrow f$ este descrescătoare, iar pe [4, +∞), $f'(x)\geq\Rightarrow f$ este crescătoare.

c) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\Rightarrow x\in(0,1]\Rightarrow -2\leq f(x)<0$, $f\left(x^2\right)=x^2\sqrt{x^2}-3x^2=x^3-3x^2$ şi

$$x\in[0,1]\Rightarrow -2\leq f\left(x^2\right)\leq 0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-2\leq f(x)<0\\-2\leq f\left(x^2\right)\leq 0\end{array}\right\}\Rightarrow -4\leq f(x)+f\left(x^2\right)\leq 0.$$