

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 - b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
 - c) Să se arate că tangenta la graficul funcției f , dusă în punctul de coordonate $(x_0, f(x_0))$, unde $x_0 = -2$, este paralelă cu axa Ox .
2. Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$.
 - a) Să se verifice că $f(1) + f(e) = \frac{2e}{1 + e}$.
 - b) Să se arate că $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}$, oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.
 - c) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x) + 1)^2}$.
3. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 - b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
 - c) Știind că $g: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ este funcția definită prin $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, să se determine
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \dots + g(x^{2008}) + x^{2010}}{x^{2009}}$$
.
4. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x - x + 1$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
 - b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
 - c) Să se rezolve în $(0, +\infty)$ ecuația $f(x^{2008}) + f\left(\frac{1}{x^{2008}}\right) = 0$.
5. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in (0, +\infty)$.
 - b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.
 - c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x}$.
6. Fie funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$.
 - a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (1, \infty)$.
 - b) Să se verifice că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$.
 - c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.

7. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2008} + 2008^x$.

- Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- Să se demonstreze că funcția f este convexă pe M .
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$.

8. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

- Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- Să se arate că $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
- Să se demonstreze că oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ avem $\frac{2}{3} \leq f(x) + f(x^2) \leq 4$.

9. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$.

- Să se verifice că $f'(0) = 1$.
- Să se arate că funcția f este convexă pe M .
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{e^x}$.

10. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$ și $g(x) = xe^x$.

- Să se verifice că $f'(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
- Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției g .
- Dacă $I \subset \mathbf{R}$ este un interval, să se demonstreze că funcția g este crescătoare pe I dacă și numai dacă funcția f este convexă pe I .

11. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$ dată prin $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

- Să se arate că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$, pentru orice $x \neq 1$.
- Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- Să se demonstreze că pentru orice $a < 1$ și $b > 1$ are loc inegalitatea $f(a) - f(b) \leq -8$.

12. Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$

- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1, \infty)$.
- Să se arate că funcția f este descrescătoare pe $[1, 2]$.
- Folosind faptul că $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$, oricare ar fi $x \in [1, \sqrt{2}]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2 - x \leq 2 \ln x$, pentru orice $x \in [1, \sqrt{2}]$.

13. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

- Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, $\forall x > 0$.
- Să se arate că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

- c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.
14. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x-2)\ln x$.
- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- c) Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0, +\infty)$.
15. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$.
- a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.
- b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.
16. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.
- a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- c) Să se determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x) + f(e^{x^2}) + \dots + f(e^{x^{2008}})}{x^{2008}}$.
17. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax - 6, & x < 4 \\ \sqrt{x}, & x \geq 4 \end{cases}$, unde a este parametru real.
- a) Să se determine valoarea reală a lui a , astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 4$.
- b) Să se calculeze $f'(9)$.
- c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(9,3)$.
18. a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$.
- b) Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 - 6x^2 + 18x + 12$.
- c) Să se determine semnul funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = (x^2 - 1)\ln x$.
19. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln x$.
- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- b) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.
- c) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.
20. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3^x + 1, & x \leq 1 \\ ax + 2, & x > 1 \end{cases}$.
- a) Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.

- b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f .
- c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((f(x) - 1) \cdot x)$
- 21.** Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^x - x - 1$.
- a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f''(x)}$.
- c) Utilizând faptul că $e^x \geq x + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ să se demonstreze inegalitatea $\frac{e^{n+1} - e}{e - 1} \geq \frac{n \cdot (n + 3)}{2}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.
- 22.** Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^x - ex - 1$.
- a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.
- b) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- c) Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției f în punctul $O(0,0)$ și dreapta de ecuație $x = 1$.
- 23.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - \ln x$.
- a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0, +\infty)$.
- b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- c) Să se demonstreze că $\sqrt{x} \geq 1 + \ln \sqrt{x}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
- 24.** Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
- a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$.
- c) Să se determine asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f .
- 25. a)** Să se studieze continuitatea funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < 1 \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$, în punctul $x_0 = 1$.
- b) Să se calculeze derivata funcției $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1$.
- c) Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32$.
- 26.** Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2^x - x \ln 2$.
- a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.
- c) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- 27.** Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x+1}{x-3}$.
- a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$.
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$.
- c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

28. Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$.

- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1, +\infty)$.
- Să se studieze monotonia funcției f pe $[1, +\infty)$.
- Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, e)$.

29. Se consideră funcțiile $f, h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ și $h(x) = f^2(x)$.

- Să se verifice că $h'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, oricare ar fi $x \geq 0$.
- Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- Să se demonstreze că funcția h este crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

30. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$.

- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției f .
- Să se demonstreze că $f(x) + f(x^3) \geq -2$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

31. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+2}, & x \geq 0 \\ x + \frac{3}{2}, & x < 0 \end{cases}$.

- Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.
- Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .
- Să se arate că $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, 2 \right)$, oricare ar fi $x \in [0, \infty)$.

32. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ și $g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

- Să se calculeze $f'(x) - g'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- Să se demonstreze că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

33. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 3x$.

- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^3}$.

34. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$.

- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .

35. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbf{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x}$.

- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- Să se arate că funcția f este crescătoare pe $(0, +\infty)$.
- Să se determine coordonatele punctului, care aparține graficului funcției f , în care tangenta la graphic are panta egală cu $\frac{3}{2}$.

36. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ se consideră funcțiile $f_n:(0,+\infty)\rightarrow\mathbf{R}$, $f_0(x) = \ln x$ și $f_n(x) = f_{n-1}'(x)$.

- Să se determine funcția f_1 .
- Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f_2 .
- Să se arate că $f_0(x) \leq \frac{1}{f_1(x)} - 1$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

37. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

- Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
- Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

38. Se consideră funcția $f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}, & x \leq 1 \\ \frac{2x + a}{x^2 + 2}, & x > 1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbf{R}$.

- Să se determine numărul real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.
- Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficului funcției f .
- Să se determine numărul real a astfel încât panta tangentei la grafic în punctul $x_0 = 2$ să fie egală cu 1.

39. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)$ și $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

- Să se demonstreze că $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.
- Să se rezolve ecuația $h'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-1}$, unde $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$.
- Să se demonstreze că $\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)} + \frac{f'(x)}{f(x)}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$.

40. Se consideră funcția $f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1}, & x \leq 0 \\ -2x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

- Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.
- Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.
- Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

41. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

- a) Să se verifice că $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
- b) Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f .
- c) Să se arate că $f(x) \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

42. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x-3)\ln x$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.

43. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

- a) Să se verifice că $f'(x) - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
- b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- c) Să se arate că $f(\sqrt[3]{2007}) \leq f(\sqrt[3]{2008})$.

44. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + 3^x$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- b) Să se determine asimptota spre $-\infty$ a funcției f .
- c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .

45. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$

- a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.
- b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .
- c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ avem $f(e^x + 1) \geq 4$.

46. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$.

- a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x > 0$.
- b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.
- c) Să se arate că $f(x) \geq -1$, pentru orice $x > 0$.

47. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

- a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$ pentru orice $x > 0$.
- b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.
- c) Să se demonstreze că $x + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 3$ pentru orice $x > 0$.

- 48.** Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
- Să se calculeze $f'(x)$, unde $x \in \mathbf{R}$.
 - Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
- 49.** Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$.
- Să se verifice că $f'(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{e^x}$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
 - Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
 - Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{e}$ pentru orice $x \leq 2$.
- 50.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.
- Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.
 - Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
 - Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.
- 51.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
- Să se verifice că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ pentru orice $x > 0$.
 - Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = e$.
 - Să se arate că $\ln \ln x \leq \frac{x}{e}$ pentru orice $x > 0$.
- 52.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln x - x$.
- Să se verifice că $f'(x) = \ln x$ pentru orice $x > 0$.
 - Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.
 - Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.
- 53.** Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
- Să se calculeze $f'(1)$.
 - Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .
 - Să se arate că $f(x) \leq 3$, pentru orice $x \leq 2$.
- 54.** Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
- Să se calculeze $f'(1)$.
 - Să se determine intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției f .
 - Să se arate că $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \geq -\frac{1}{2}$.

55. Fie funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$, pentru orice $x > 0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

c) Să se arate că $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$, pentru orice $x > 0$.

56. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x - \ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.

c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x > 0$.

57. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ pentru orice $x > 0$.

b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcției f .

c) Să se demonstreze că $e^x \geq ex$ pentru orice $x > 0$.

58. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x+1)e^x - 1$.

a) Să se verifice dacă $f'(x) = (x+1) \cdot e^x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

c) Să se arate că $x \cdot f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

59. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot e^x$.

a) Să se verifice dacă $f'(x) = (x+1) \cdot e^x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției f .

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f .

60. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x > 1$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .

c) Să se arate că $f(\sqrt[3]{2}) > f(\sqrt[3]{3})$.

61. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ pentru orice $x > 0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

c) Să se arate că $f(2007) > f(2008)$.

62. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

- a) Să se verifice dacă $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
- b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .
- c) Să se arate că $f(\sqrt[3]{2007}) < f(\sqrt[3]{2008})$.
63. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.
- a) Să se verifice dacă $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x > 1$.
- b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 2$.
- c) Să se demonstreze că $f(x) \geq e^2$, pentru orice $x > 1$.
64. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}$.
- a) Să se verifice dacă $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x > 0$.
- b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.
- c) Să se arate că $\frac{x+2}{3} \geq \sqrt[3]{x}$, pentru orice $x > 0$.
65. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.
- a) Să se verifice dacă $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.
- b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .
- c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.