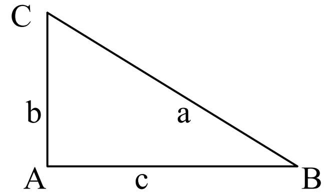
Funcții trigonometrice

1. Definiții în triunghiul dreptunghic

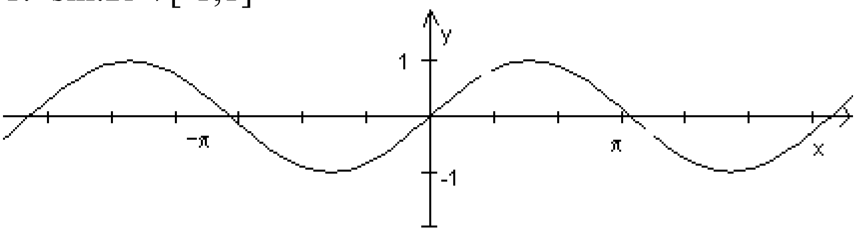
$\sin B = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$, $tgB = \frac{b}{c}$

$ctgB = \frac{c}{b}$, $\sin B = \cos C$, $tgB = ctgC$



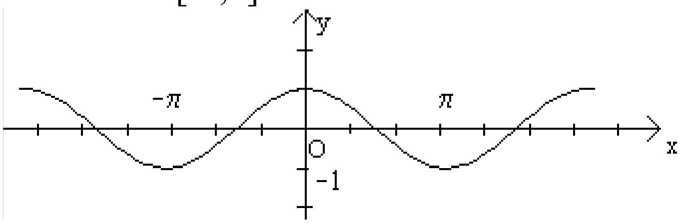
2. Proprietãțile funcțiilor trigonometrice

1. sin:**R**→[-1,1]



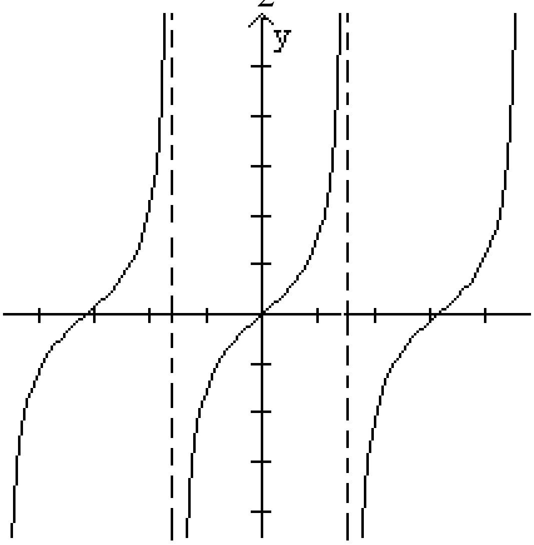
sin(-x) = -sin x, sin(x + 2kπ) = sin x, (k∈Z)

2. cos:**R**→[-1,1]



cos(-x) = cos x, cos (x + 2kπ) = cos x, (k∈Z)

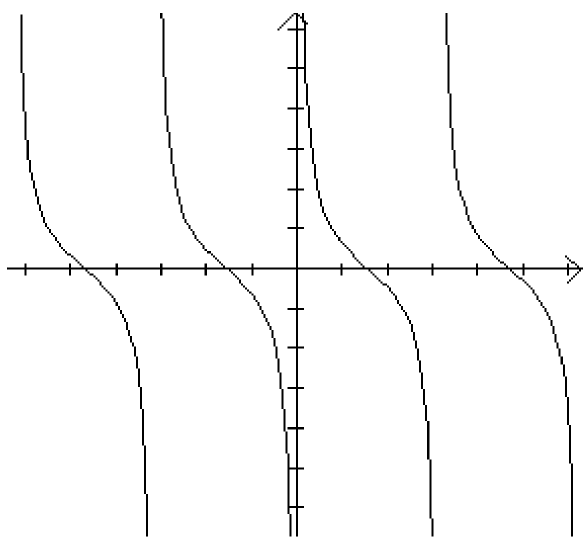
3. tg:**R**\{(2k+1)$\frac{\pi}{2}$}→**R**



tg(-x) = -tg x

tg(x+kπ) = tg x, (k∈Z)

4. ctg:**R**\{kπ}→**R**



ctg(-x) = -ctg x

ctg(x + kπ) = ctg x, (k∈Z)

Formule trigonometrice

1. Relații între funcțiile trigonometrice ale unui argument:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$

   $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}; \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

2. $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

   $\sin\alpha = \dfrac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}; \quad \cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$

3. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$; $tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = ctg\alpha$

4. $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

   $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$; $tg(\pi-\alpha) = -tg\alpha$

5. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

   $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$, $tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -ctg\alpha$

6. $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

   $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$; $tg(\pi+\alpha) = tg\alpha$

7. $\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha$

   $\sin(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$; $tg(2\pi-\alpha) = -tg\alpha$

2. Formule de adunare:

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$tg(\alpha\pm\beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$

3. Formule pentru multiplii de argument:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \dfrac{2}{ctg\alpha - tg\alpha}$

$ctg 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} = \dfrac{ctg\alpha - tg\alpha}{2}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha};\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\sin n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha - ...$$

$$\cos n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha - ...$$

4. Formule pentru jumãtãți de argument:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

5. Sume, diferențe şi produse:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$tg\alpha\cdot tg\beta = \frac{tg\alpha + tg\beta}{ctg\alpha + ctg\beta}$$

Inversarea funcțiilor trigonometrice

1. arcsin:[-1.1]→$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin y = x \Leftrightarrow \sin x = y$

arcsin (-x) = - arcsin x

2. arcos:[-1,1]→[0,π], arcos (-x) = π - arcos x

3. arctg:R→$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, arctg (-x) = -arctg x

4. arctg:R→(0,π), arctg (-x) = π - arctg x

Soluțiile ecuațiilor trigonometrice simple

1. Ecuații fundamentale

$1.\sin x = a, a \in [-1,1] \Rightarrow x \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi | k \in Z\}$

$2.\cos x = a, a \in [-1,1] \Rightarrow x \in \{\pm \arccos a + 2k\pi | k \in Z\}$

$3.tgx = a, a \in R \Rightarrow x \in \{arctga + k\pi | k \in Z$

$4.ctgx = a, a \in R \Rightarrow x \in \{accctga + k\pi | k \in Z\}$

2. Tabele de valori:

x / funcția	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0
ctg x	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0	/

x / funcția	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arcos x	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x / functia	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctg x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctg x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Relații metrice în triunghi

1. Triunghiul dreptunghic

ABC (m(∠A) = 90°, AD⊥BC)

1. Teorema lui Pitagora: $a^2 = b^2 + c^2$;
2. Teorema catetei: $b^2 = a\cdot CD$, $c^2 = a\cdot BD$;
3. Teorema înãlțimii: $h_a^2 = BD\cdot DC$;
4. $h_a = \frac{b\cdot c}{2}, h_b = b, h_c = c$;
5. $m_a = \frac{a}{2}, m_b^2 = a^2 - \frac{3}{4}b^2, m_c^2 = a^2 - \frac{3}{4}c^2$;
6. $b_a = \frac{b\cdot c}{b+c}\sqrt{2}; b_b = c\cdot\sqrt{\frac{2a}{a+c}}; b_c = b\cdot\sqrt{\frac{2a}{a+c}}$;
7. $A_{ABC} = \frac{b\cdot c}{2}$;
8. $R = \frac{a}{2}$;
9. $r = \frac{b\cdot c}{a+b+c}$;
10. Relații exprimate prin funcții trigonometrice:

    $b = a\cdot\sin B$, $b = a\cdot\cos C$, $b = c\cdot\text{tg } B$, $b = c\cdot\text{ctg } C$.

2. Triunghiul echilateral ABC (a=b=c)

1. $h_a = m_a = b_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
2. $A_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;
3. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
4. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

3. Triunghiul oarecare ABC (AD⊥BC)

1. Teorema lui Pitagora generalizatã:
   a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2a\cdot BD$, dacã m(∠B)<90° ;
   b) $b^2 = a^2 + c^2 + 2a\cdot BD$, dacã m(∠B)>90° ;

2. Relațiile lui Steward O∈(BC):
   $b^2 \cdot BO + c^2 \cdot CO - a^2 \cdot AO = a \cdot BO \cdot CO$;
3. $m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$;
4. $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
5. $b_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}$;
6. $A_{ABC} = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = S$;
7. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
8. $R = \dfrac{abc}{4S}$;
9. $r = \dfrac{S}{p}$.

4. Relații exprimate prin funcții trigonometrice

1. Teorema sinusurilor: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$;
2. Teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$;
3. Teorema tangentelor: $tg\dfrac{A-B}{2}tg\dfrac{C}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}$;
4. $S = \dfrac{ab\sin C}{2}$, $S = \dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$, $S = p(p-a)tg\dfrac{A}{2}$, $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$;
5. $p = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;
6. $h_a = 2R\sin B\sin C$;
7. $m_a^2 = R^2(\sin^2 A + 4\cos A\sin B\sin C)$;
8. $b_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$;
9. $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$;
10. $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$;
11. $tg\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.

Probleme propuse

1. Se consideră triunghiul ABC cu AB=4, $AC=\sqrt{7}$ şi $BC=\sqrt{3}$. Să se calculeze cos B .
2. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că AC=2, $m(\sphericalangle BAC)$=30° şi $AB = 4$.
3. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că AB=AC= 2 , $m(\sphericalangle A)$=30°.
4. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC , ştiind că AB = 3 şi $m(\sphericalangle C)$=30°.
5. Să se calculeze $\sin^2 100^0 + \cos^2 80^0$.
6. Fie triunghiul dreptunghic ABC şi D, mijlocul ipotenuzei BC. Să se calculeze lungimea laturii AB ştiind că AC = 6 şi AD = 5.
7. Se consideră triunghiul ABC cu AB = 1, AC = 2 şi $BC=\sqrt{5}$. Să se calculeze cos B.
8. Se consideră triunghiul ABC cu AB = 5, AC = 6 şi BC = 7. Să se calculeze cos A.
9. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că $AB=2\sqrt{3}$, $AC=\sqrt{3}$ şi $m(\sphericalangle BAC)$=60°.
10. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC ştiind că AB = 6, AC = 10 şi $m(\sphericalangle A)=60^{o}$.
11. Se consideră triunghiul ABC având aria egală cu 15. Să se calculeze sin A ştiind că AB=6 şi AC = 10.
12. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că BC = 8 şi $m(\sphericalangle A)=45^{o}$.
13. Se consideră triunghiul ABC de arie egală cu 6, cu AB=3 şi BC=8. Să se calculeze sin$B$.
14. Se consideră triunghiul ABC de arie egală cu 7. Să se calculeze lungimea laturii AB ştiind că AC = 2 şi că $m(\sphericalangle A)=30^{o}$.
15. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că AB = 2, BC = 4 şi $m(\sphericalangle B)=60^{o}$.
16. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că AB = 5, AC = 4 şi $m(\sphericalangle A)=60^{o}$.
17. Să se calculeze lungimea înălțimii din A în triunghiul ABC ştiind că AB=3, AC=4 şi BC= 5 .
18. Să se calculeze sin135°.
19. Raza cercului circumscris triunghiului ABC este $\frac{3}{2}$, iar BC = 3 . Să se calculeze sin A.
20. Să se determine numărul real x pentru care x, x+7 şi x + 8 sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.
21. Să se calculeze aria triunghiului ABC ştiind că AB = 6 , AC = 8 şi BC =10 .
22. Să se calculeze sin A , ştiind că în triunghiul ABC se cunosc AB = 4, BC = 2 şi $m(\sphericalangle C)$=60°.
23. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC , cu $m(\sphericalangle A)=90^0$ şi $\cos B=\frac{3}{5}$. Să se calculeze sin$C$.
24. Să se calculeze cos A în triunghiul ABC , ştiind că AB=2, BC=3 şi AC=4.
25. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC , ştiind că sin$A=\frac{1}{2}$ şi că lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 4.
26. Să se demonstreze că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, atunci are loc relația $\sin B+\cos B=\frac{AB+AC}{BC}$.

27. Să se calculeze produsul $(\cos 1^0 - \cos 9^0)\cdot(\cos 2^0 - \cos 8^0)\cdot\ldots\cdot(\cos 9^0 - \cos 1^0)$.
28. Să se calculeze $\sin A$ în triunghiul ABC , ştiind că $BC = 10$, iar lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 10.
29. Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral care are aria egală cu $\sqrt{3}$.
30. Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC ştiind că $BC = \sqrt{2}$, $m(\sphericalangle BAC) = 30^0$ şi $m(\sphericalangle ABC) = 45^0$.
31. Să se calculeze cosinusul unghiului A, în triunghiul ABC, ştiind că $AB = 3$, $AC = 5$ şi $BC = 6$.
32. Să se calculeze numărul $\sin 60^0 \cdot \cos 150^0$.
33. Să se arate că într-un triunghi ABC dreptunghic în A are loc relația $\cos^2 B + \cos^2 C = 1$.
34. Să se calculeze aria triunghiului ABC, ştiind că $AB = AC = 4$ şi $m(\sphericalangle A) = 60^0$.
35. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC ştiind că $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle B) = 30^0$ şi $AB = 4\sqrt{3}$.
36. Triunghiul ABC este dreptunghic în C , iar raza cercului circumscris triunghiului este $R = 10$. Să se calculeze lungimea laturii AB.
37. Să se arate că pentru $x \in (0^0, 90^0)$ este adevărată egalitatea $\sin x \cdot \cos(90^\circ - x) + \cos^2(180^\circ - x) = 1$.
38. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic ABC , cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, are loc relația $AD^2 = AB \cdot AC \cdot \sin B \sin C$, unde D este piciorul înălțimii din A.
39. Să se determine probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $A = \{\sin 30^0, \sin 45^0, \sin 60^0\}$, acesta să fie număr rațional.
40. Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are lungimea înălțimii egală cu $3\sqrt{3}$.