Probleme de logică și teoria mulțimilor

1. Să se calculeze $E = (2^5 \cdot 2^3)^4 : 2^{30} - 2^2 + 2^0$.

2. Să se determine $A \cup (B \cap C)$ ştiind că $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, $C = \{6,7,8\}$.

3. Să se calculeze $\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{32} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} + 1$.

4. Să se calculeze $\frac{2^4}{\left(4^2\right)^3} \cdot \frac{\left(2^3\right)^8}{5^3} \cdot \left(1{,}5\right)^3$.

5. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbf{N} \mid -1 \le x \le 3\}$ şi $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid 1 \le x < 4\}$. Să se determine $A \cap B$.

6. Să se calculeze $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

7. Să se arate că numărul $N = \frac{22}{3\sqrt{3}-\sqrt{5}} + 1 - 3\sqrt{3} - \sqrt{5}$ este natural.

8. Fie mulţimile $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -3 \le x < 2\}$ şi $B = \{x \in \mathbf{N} \mid -1 \le x \le 6\}$. Să se determine mulţimea $A \cap B$.

9. Să se calculeze $\left|5-\sqrt{6}\right| + \left|-5-\sqrt{6}\right|$.

10. Să se demonstreze că numărul $\left|\sqrt{7}+\sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{3}-\sqrt{7}\right| + \left|2\sqrt{3}-7\right|$ este natural.

11. Să se calculeze $\left|-\sqrt{3}\right| + \left|1+\sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{3}-1\right|$.

12. Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -5 < x \le 4\}$.

13. Să se calculeze media geometrică a numerelor $3\sqrt{6}$ şi $5\sqrt{6}$.

14. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ pentru care $\sqrt{50} + \sqrt{200} = \sqrt{n} + \sqrt{128}$.

15. Să se calculeze $\left|7{,}3(8) - \frac{15}{2}\right|$.

16. Să se calculeze $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}} + \frac{1}{\sqrt{120}-\sqrt{121}}$.

17. Să se calculeze $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right| + \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right| + ... + \left|\frac{2007}{2008} - \frac{2008}{2009}\right|$.

18. Se consideră predicatul $p(x)$: "$2x^2 + 3x - 7 = x + 5, x \in \mathbf{Z}$" . Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei $p(-3)$.

19. Să se ordoneze crescător numerele 2^6 , 2^0 , 2^2 , 2^{-4} , 2^{-2} .

20. Să se calculeze $\left(5^2\right)^3 \cdot 5^{-2} \cdot \frac{1}{125} \cdot 5^0$.

21. Să se calculeze $2^5 \cdot 2^{-2} : 2^4 + \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot 2^{-1} \cdot \frac{1}{2^{-6}}$.

22. Se dă mulţimea $A_n = \left\{ x = \frac{k+5}{k+1} \middle| k \le n, \text{unde} k, n \in \mathbf{N} \right\}$.

a) Să se arate că A_{99} are 100 de elemente.

b) Să se determine elementele mulţimii $A_{99} \cap \mathbf{N}$.

23. Să se arate că, dacă n este număr natural impar, atunci $n^2 - 1$ se divide cu 8.

24. Să se determine a 2008-a zecimală a numărului $\frac{2}{7}$.

25. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei :"există $x \in \mathbf{N}, \frac{x}{3} - \frac{3}{2} = 1$.

26. Se dă mulţimea $M = \{2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, ..., 2^n\}$. Să se determine numărul natural n, $n \ge 2$, astfel încât produsul elementelor mulţimii M să fie egal cu 128.

27. Dacă mulţimea A are 8 elemente, mulţimea B are 6 elemente, iar mulţimea $A \cap B$ are 4 elemente, să se determine numărul de elemente al mulţimii $A \cup B$.

28. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = a^2 + b^2 , x \le 20, a, b \in \mathbf{N}^* , a \ne b\}$. Să se determine elementele mulţimii A.

29. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2a + 3b, x \le 5, a, b \in \mathbf{N}\}$. Să se determine elementele mulţimii A.

30. Să se scrie un număr raţional mai mare decât $\sqrt{1{,}5}$ şi mai mic decât $\sqrt{1{,}75}$.

31. Să se scrie toate numerele naturale impare de 3 cifre care se pot forma utilizând numai cifre din mulţimea $\{5,6\}$.

32. Dacă $2{,}5(31) = a_0 , a_1 a_2 ... a_n ...$, să se determine a_{15} .

33. Fiind date propoziţiile: q:”$2^{-\frac{1}{2}} > 1$” şi p :”1+ 2 + 3+ ...+ 20 = 210" , să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei $p \vee q$.

34. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei p: "există $x \in \mathbf{R}$, $|x - 2| = \frac{1}{2}$ ".

35. Fie mulţimile $A = \{2,3,4,6\}$ şi $B = \{1,2,3\}$. Să se determine elementele mulţimii $M = \{(x, y) \in A \times B \mid x + 2y = 6\}$.

36. Se consideră mulţimea $A = \{x^2 - 3x \mid x \in \mathbf{N}\}$.

a) Să se determine cel mai mic element al mulţimii A.

b) Să se arate că toate elementele mulţimii A sunt numere pare.

37. Să se determine câte numere întregi aparţin reuniunii intervalelor $I = [-2;3)$ şi $J = [0;5)$.

38. Să se demonstreze egalitatea $125^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} - 3^{-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4$.

39. Să se calculeze produsul primelor 10 zecimale ale numărului $\sqrt{145}$.

40. Să se dea exemplu de un număr x, $x \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, astfel încât $\frac{5x+4}{x+1} \in \mathbf{Z}$.