Logaritmi

Definiție. *Fie $a\in R^*_+$, $a\neq 1$ şi $b\in R^*_+$ două numere reale. Se numeşte* <u>*logaritm*</u> *al numărului real strict pozitiv **b** exponentul la care trebuie ridicat numărul **a**, numit bază, pentru a obține numărul **b**.*

Logaritmul numărului b în baza a se notează $\log_a b$

Evident $b = a^{\log_a b}$. Pentru a = 10 obținem logaritmi zecimali (lg$x$), iar pentru a = e obținem logaritmi naturali (ln$x$).

Proprietăți:

1. Identitatea logaritmica fundamentală $a^{\log_a b} = b$ unde $a > 0$, $a \neq 1$ si $b > 0$.
2. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$, $(b,c > 0)$;
3. $\log_a a = 1$;
4. $\log_a 1 = 0$
5. $\log_a a^c = c$; $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$; $\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$, $x\neq 0$
6. $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m}\log_a b,\ (b > 0, m \in N, m \geq 2)$;
7. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;
8. Formula de schimbare a bazei logaritmului: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
9. $x>0$ şi $y>0 \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
10. $x>0$ şi $y>0 \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
11. $a>1$ şi $x\in(0,1) \Rightarrow \log_a x < 0$; $a>1$ şi $x>1 \Rightarrow \log_a x > 0$;
12. $0<a<1$ şi $x\in(0,1) \Rightarrow \log_a x > 0$; $0<a<1$ şi $x>1 \Rightarrow \log_a x < 0$;
13. $a>1$ şi $0<x<y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;
14. $x>0, y>0, a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1 \Rightarrow \frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$;
15. $x>0, a>0, a\neq 1, n\in \mathbf{N} \Rightarrow n\cdot\log_a x = \log_a x^n$;
16. $x\in R, a>0, a\neq 1 \Rightarrow a^x = e^{x\ln a}$.

Ecuații şi inecuații logaritmice fundamentale

1. $\log_a x = b$, $a>0$, $a\neq 1$, $b\in\mathbf{R}$. Soluția: $x = a^b$.
2. $\log_a x > b$, $b\in\mathbf{R}$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	S
$a > 1$	$(a^b, +\infty)$
$0 < a < 1$	$(0, a^b)$

3. $\log_a x < b$, $b\in\mathbf{R}$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	S
$a > 1$	$(0, a^b)$
$0 < a < 1$	$(a^b, +\infty)$

4. Ecuatia $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$ este echivalentă cu
$f(x) = g(x)$, cu condițiile $f(x) > 0$, $g(x) > 0$
5. Ecuatia $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ este echivalenta cu

$f(x) = g(x)$,
Condiții:
$$\left.\begin{array}{l} h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0,\ g(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D \text{ domeniul de rezolvabilitate}$$

Probleme propuse

1. Se consideră funcția $f : (0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = \log_2 x$. Să se calculeze $f(1)+f(4)-f(2)$.
2. Să se arate că $\log_3 24=1+3a$, unde $a = \log_3 2$.
3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x-4\lg x+3=0$.
4. Se consideră numărul $a = \log_2 3$. Să se arate că $\log_2 18=2a+1$.
5. Să se rezolve ecuația $2^{\log_2 x} = 4$.
6. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 \sqrt[3]{x} = 1$.
7. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x-3\lg x+2=0$.
8. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2 - x - 2\right) - \log_2\left(2x-4\right) = 1$.
9. Să se arate că $\log_2 14+\log_2 3-\log_2 6=\log_2 7$.
10. Să se calculeze $\log_2 \frac{1}{4} - \sqrt[3]{-8}$.
11. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+1)=1+\log_5(x-1)$.
12. Să se calculeze $\dfrac{\log_5 18 - \log_5 2}{\log_5 3}$.
13. Să se verifice că $\log_2 5+\log_2 12-\log_2 30=1$.

14. Să se arate că numerele 1, $\log_3 9$ şi $\sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

15. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 \sqrt{x+1} = 1$.

16. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x+4)+\lg(2x+3)=\lg(1-2x)$.

17. Să se calculeze $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \log_5 25$.

18. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2 + 2x - 3\right) = 1$.

19. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x^2 = 2$.

20. Să se arate că numărul $A = \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \ldots + \log_3 \frac{9}{8}$ este natural.

21. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log 2\left(x^2 - x - 2\right) = 2$.

22. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+2)-\log_2(x+1)=1$.

23. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_7 (2x+1) = 2$.

24. Să se calculeze $\log_6 3+\log_6 10-\log_6 5$.

25. Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f{:}D\rightarrow\mathbf{R}, f(x)=\lg(2x-3)$.

26. Să se arate că $\log_2 4+\log_3 9< \sqrt{36}$.

27. Să se calculeze $\log_5 25 - \log_3 9$.

28. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2 + 3x - 10\right) = 3$.

29. Să se arate că numărul $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\log_2 8}$ este natural.

30. Să se compare numerele 2^2 şi $\log_2 32$.

31. Să se calculeze $\log_3 5+\log_3 6-\log_3 10$.

32. Să se verifice că $\lg\frac{1}{2} + \lg\frac{2}{3} + ... + \lg\frac{9}{10} = -1$.

33. Să se calculeze $\log_2 3 - \log_2 \frac{3}{2}$.

34. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5 (2x+3)=2$.

35. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 (10-x)=2$.

36. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5 (2x+1)=1$.

37. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5 (9-x^2)=1$.

38. Să se calculeze $\log_2 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{8}$.

39. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 (3x-1)=\log_3 (2x+1)$.

40. Să se calculeze $\log_5 10+\log_5 3-\log_5 6$.

41. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2 + 4\right) = \log_2\left(x + 4\right)$.

Probleme rezolvate

1. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5 (3x + 4) = 2$.

R. Condiții: $3x+4>0 \Rightarrow 3x > -4 \Rightarrow x > -\frac{4}{3} \Rightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$=*D*, domeniul de rezolvabilitate.

Din definiția logaritmului obținem:

$3x + 4 = 2^5 \Rightarrow 3x = 32 - 4 \Rightarrow 3x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{3} \in D$, soluție.

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2 (x + 2) + \log_2 x = 3$.

R. Condiții: $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0, +\infty) = D$. Aplicând proprietățile logaritmilor:

$\log_a A + \log_a B = \log_a (A \cdot B)$ se obține: $\log_2 x(x + 2) = 3$ şi din definiția logaritmului avem:

$x(x + 2) = 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$ cu soluțiile $x_1=2$ şi $x_2=-4$. Soluția ecuației este $x=2 \in D$.

3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2 (x + 2) - \log_2 (x - 5) = 3$.

R. Condiții: $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 5 \end{cases} \Rightarrow D = (5, +\infty)$.

Aplicând proprietățile logaritmului ecuația va fi:

$\log_2 \frac{x+2}{x-5} = 3 \Rightarrow \frac{x+2}{x-5} = 2^3 \Rightarrow x + 2 = 8(x - 5) \Rightarrow x + 2 = 8x - 40 \Rightarrow 7x = 42 \Rightarrow x = 6 \in D$.

4. Să se determine valorile reale pozitive ale numărului *x,* ştiind că $\lg\sqrt{x}$, $\frac{3}{2}$ şi $\lg x$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

R. Verificăm proprietatea de medie aritmetică:

$\frac{3}{2} = \frac{\lg\sqrt{x} + \lg x}{2} \Rightarrow \lg x\sqrt{x} = 3 \Rightarrow \sqrt{x^3} = 10^3 \Big| (\ )^2 \Rightarrow x^3 = (10^2)^3 \Rightarrow x = 10^2 = 100$.

5. Să se calculeze $\log_3 27 - \log_2 8$.

R. Din definiția logaritmului avem $\log_3 27 = 3$ şi $\log_2 8 = 3 \Rightarrow \log_3 27 - \log_2 8 = 3 - 3 = 0$.

6. Să se verifice că $\log_3 9 - \log_2 8 = \log_4 \frac{1}{4}$.

R. $\log_3 9 - \log_2 8 = 2 - 3 = -1$ şi $\log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{-1} = -1$.

7. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_3(x^2-2x)=\log_3(2x-3)$.

R. Condiții: $\begin{cases} x^2-2x>0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$,

$x^2-2x=0,\ x_1=0,\ x_2=2$,

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
x^2-2x	+ + + + + 0 – – – – 0 + + + + + +

$S_1=(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

$2x-3>0\Rightarrow 2x>3\Rightarrow x>\dfrac{3}{2}$, $S_2=\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

Domeniul de rezolvabilitate $D=S_1\cap S_2=(2,+\infty)$.

Rezolvare: din injectivitatea funcției logaritmice avem $x^2-2x=2x-3\Rightarrow x^2-4x+3=0$ cu soluțiile x_1=1 şi x_2=3. Soluția ecuației este $x=4$ care aparține lui D.

8. Ştiind că $\log_3 2=a$, să se verifice dacă $\log_3 8+\log_3 100-\log_3 25=5a$.

R. $\log_3 8+\log_3 100-\log_3 25=\log_3 2^3+\log_3 10^2-\log_3 5^2=3\log_3 2+2\log_3(2\cdot 5)-2\log_3 5=$
$=3a+2\log_3 2\cancel{+2\log_3 5}\cancel{-2\log_3 5}=3a+2a=5a.$

9. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_3(x^2-4x+4)=2$.

R. Condiții $x^2-4x+4>0\Rightarrow(x-2)^2>0\Rightarrow x\neq 2$ şi $D=\mathbf{R}\setminus\{2\}$.

Rezolvare: $x^2-4x+4=3^2\Rightarrow x^2-4x-5=0$ cu soluțiile $x_1=-1$ şi $x_2=5$ care sunt soluțiile ecuației.

10. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+5)=3$.

R. Condiția $x+5>0\Rightarrow x>-5\Rightarrow x\in(-5,+\infty)$. Rezolvare: $x+5=2^3\Rightarrow x+5=8\Rightarrow x=3$.

11. Să se calculeze $2\log_3 4-4\log_3 2$.

R. $2\log_3 4-4\log_3 2=\log_3 4^2-\log_3 2^4=\log_3 16-\log_3 16=0$.

12. Să se calculeze $\log_2 3+\log_2\dfrac{1}{3}$.

R. $\log_2 3+\log_2\dfrac{1}{3}=\log_2\left(3\cdot\dfrac{1}{3}\right)=\log_2 1=0$.

13. Să se calculeze $\log_6 24-\log_6 4$.

R. $\log_6 24-\log_6 4=\log_6\dfrac{24}{4}=\log_6 6=1$.

14. Să se calculeze $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 4$.

R. $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 4 = \log_3 \frac{6 \cdot 2}{4} = \log_3 3 = 1$.

15. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x-3)=0$.

R. Condiția $x-3>0 \Rightarrow x>3$. Rezolvare: $x-3=2^0 \Rightarrow x=4$, soluție.

16. Să se calculeze $\lg 20 + \lg 3 - \lg 6$.

R. $\lg 20 + \lg 3 - \lg 6 = \lg \frac{20 \cdot 3}{6} = \lg 10 = 1$.

17. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 (x^2 - 1)=1$.

R. Condiția $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Rezolvare: $x^2 - 1 = 3^1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$ şi $S = \{-2,2\}$.