

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 5р 1. Розглядають комплексне число  $z = 3 + 2i$ . Докажіть, що  $z + \frac{13}{z} = 6$ .
- 5р 2. Розглядають функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 5$  і  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 + x$ . Знайдіть дійсне число  $a$  для якого  $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(-a)$ .
- 5р 3. Розв'яжіть у множині дійсних чисел рівняння  $3^{3x+5} = 9 \cdot 3^{x+1}$ .
- 5р 4. Розглядають множини  $A$  з 4 елементами. Обчисліть ймовірність того, що вибираючи одну множини з множини підмножин  $A$ , вона матиме непарне число елементів.
- 5р 5. У декартовому репері  $xOy$  розглядають точки  $A(1,3)$ ,  $B(3,5)$  і  $C(0,6)$ . Напишіть рівняння прямої  $d$  яка проходить через точку  $A$  і є паралельною до медіани яка проведена з вершини  $C$  трикутника  $ABC$ .
- 5р 6. Обчисліть довжину сторони  $BC$  трикутника  $ABC$  знаючи, що  $AB = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{3}$  і  $\angle B = \frac{\pi}{3}$ .

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Розглядають ненульове дійсне число  $a$  і матрицю  $A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$ , де  $x$  - дійсне число.
- 5р а) Докажіть, що  $\det(A(x)) = a$ , для будь-якого дійсного числа  $x$ .
- 5р б) Знайдіть ненульове дійсне число  $a$  для якого  $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$ , для будь-яких дійсних чисел  $x$  та  $y$ .
- 5р в) Для  $a = 1$ , визначте матрицю  $X$  для якої  $A(2) \cdot X = A(3)$ .
2. На множині  $M = [0, +\infty)$  задають асоціативний закон композиції  $x * y = \log_2(2^x + 2^y - 1)$ .
- 5р а) Докажіть, що  $0 * 2021 = 2021$ .
- 5р б) Знайдіть нейтральний елемент для закону композиції „\*”.
- 5р в) Знайдіть  $x \in M$  для якого  $x * (x+1) * (x+2) = \log_2 54$ .

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Розглядають функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$ .
- 5р а) Докажіть, що  $f'(x) = \frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5р б) Напишіть рівняння горизонтальної асимптоти до  $-\infty$  для графіка функції  $f$ .
- 5р в) Докажіть, що  $\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}} \leq \sqrt{6}$ , для будь-якого дійсного числа  $x$ .
2. Розглядають функцію  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 3 - 2 \ln x$ .
- 5р а) Докажіть, що  $\int_1^3 (f(x) + 2 \ln x) dx = 14$ .

**5p** b) Обчисліть  $\int_1^e (2x + 3 - f(x)) dx$ .

**5p** c) Докажіть, що  $\int_0^1 x^2 f(x^3 + 1) dx = \frac{4(2 - \ln 2)}{3}$ .