

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

PRIMO QUESITO

(30 puncti)

- 5p** 1. Si considera il numero complesso $z = 3 + 2i$. Dimostrate che $z + \frac{13}{z} = 6$.
- 5p** 2. Si considerano le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x$. Determinate il numero reale a per il quale $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(-a)$.
- 5p** 3. Risolvete nell'insieme dei numeri reali l'equazione $3^{3x+5} = 9 \cdot 3^{x+1}$.
- 5p** 4. Si considera l'insieme A di 4 elementi. Calcolate la probabilità che, scegliendo un'insieme dall'insieme dei sottoinsiemi di A , esso abbia un numero dispari di elementi.
- 5p** 5. Nel riferimento cartesiano ortogonale xOy si considerano i punti $A(1,3)$, $B(3,5)$ e $C(0,6)$. Determinate l'equazione della retta d passante per il punto A e parallela alla mediana dal vertice C del triangolo ABC .
- 5p** 6. Calcolate la lunghezza del lato BC del triangolo ABC , noto che $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$ e $B = \frac{\pi}{3}$.

SECONDO QUESITO

(30 puncti)

1. Si considera un numero reale a diverso da zero e la matrice $A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$, con x numero reale.
- 5p** a) Dimostrate che $\det(A(x)) = a$, per qualunque numero reale x .
- 5p** b) Determinate il numero reale a diverso da zero tale che $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, per qualunque numeri reali x ed y .
- 5p** c) Per $a = 1$, determinate la matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ per la quale $A(2) \cdot X = A(3)$.
2. Nell'insieme $M = [0, +\infty)$ è definita la legge di composizione associativa $x * y = \log_2(2^x + 2^y - 1)$.
- 5p** a) Dimostrate che $0 * 2021 = 2021$.
- 5p** b) Determinate l'elemento neutro della legge di composizione „*”.
- 5p** c) Determinate $x \in M$ per il quale $x * (x+1) * (x+2) = \log_2 54$.

TERZO QUESITO

(30 puncti)

1. Si considera la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$.
- 5p** a) Dimostrate che $f'(x) = \frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinate l'equazione dell'asintoto orizzontale verso $-\infty$ al grafico della funzione f .
- 5p** c) Dimostrate che $\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}} \leq \sqrt{6}$, per qualunque numero reale x .
2. Si considera la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3 - 2 \ln x$.
- 5p** a) Dimostrate che $\int_1^3 (f(x) + 2 \ln x) dx = 14$.

5p b) Calculează $\int_1^e (2x + 3 - f(x)) dx$.

5p c) Demonstrate că $\int_0^1 x^2 f(x^3 + 1) dx = \frac{4(2 - \ln 2)}{3}$.