Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Gegeben ist die komplexe Zahl $z=3+2i$. Zeige, dass $z+\frac{13}{z}=6$.

5p **2.** Gegeben sind die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x$. Bestimme die reelle Zahl a so, dass $(f\circ g)(a)=(f\circ g)(-a)$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $3^{3x+5}=9\cdot 3^{x+1}$.

5p **4.** Gegeben ist eine Menge A mit 4 Elementen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte Menge aus der Menge der Teilmengen von A, eine ungerade Anzahl von Elementen hat.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $A(1,3)$, $B(3,5)$ und $C(0,6)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy. Bestimme die Gleichung der Geraden d, die durch den Punkt A geht und parallel zu der Seitenhalbierenden aus dem Eckpunkt C des Dreiecks ABC ist.

5p **6.** Berechne die Länge der Seite BC des Dreiecks ABC, wenn $AB=2$, $AC=2\sqrt{3}$ und $B=\frac{\pi}{3}$.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben sind eine reelle von Null verschiedene Zahl a und die Matrix $A(x)=\begin{pmatrix}1+2x & 0 & -4x\\ 0 & a & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$, wo x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(x))=a$, für jede reelle Zahl x.

5p **b)** Bestimme die reelle von Null verschiedene Zahl a so, dass $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **c)** Für $a=1$, bestimme die Matrix $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ so, dass $A(2)\cdot X=A(3)$.

2. Auf der Menge $M=[0,+\infty)$ definiert man die assoziative Verknüpfung $x*y=\log_2\left(2^x+2^y-1\right)$.

5p **a)** Zeige, dass $0*2021=2021$.

5p **b)** Bestimme das neutrale Element der Verknüpfung „$*$”.

5p **c)** Bestimme $x\in M$ so, dass $x*(x+1)*(x+2)=\log_2 54$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der horizontalen Asymptote gegen $-\infty$ an das Schaubild der Funktion f.

5p **c)** Beweise, dass $\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$, für jede reelle Zahl x.

2. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3-2\ln x$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_1^3\left(f(x)+2\ln x\right)dx=14$.

5p **b)** Berechne $\int_1^e \left(2x+3-f\left(x\right)\right)dx$.

5p **c)** Zeige, dass $\int_0^1 x^2 f\left(x^3+1\right)dx = \frac{4\left(2-\ln 2\right)}{3}$.