Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

СУБЈЕКАТ I **(30 бодова)**

5б	**1.** Сматра се геометриска прогресија $(b_n)_{n\ge1}$ са $b_2=2$ и $b_4=4$. Одредите b_6.
5б	**2.** Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$ где m је реалан број. Одредите реални број m тако да врх графика функције f налази се на прави $y=3x$.
5б	**3.** Решите у скупу реалних бројева једначину $4^x-2^{x+1}-3=0$.
5б	**4.** Одредите број природних троцифрених бројева који имају тачно две цифре једнаке.
5б	**5.** Дужи AB и $A'B'$ имају исту средину. Докажите да $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BA'}=\vec{0}$.
5б	**6.** Докажите да, у било који троугао ABC, постоји релација $AB+AC+BC=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$, где R је полупречник описаног круга.

СУБЈЕКАТ II **(30 бодова)**

	1. Сматра се систем једначина $\begin{cases} ax+(a+1)y+(a+2)z=a \\ bx+(b+1)y+(b+2)z=b \\ y+z=1 \end{cases}$ и матрица $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, где a и b су реални бројеви.
5б	**a)** Докажите да $\det(X(0,1))=1$.
5б	**b)**Докажите да, за било који различити реални бројеви a и b, систем једначина има јединствену солуцију.
5б	**c)** Докажите да, ако (x_0,y_0,z_0) је солуција система једначина, онда $y_0^2-z_0^2-2ax_0=3$, за било који реални број a.
	2. На скупу $M=(2,+\infty)$ дефинише се асоцијативан закон слагања $x*y=(x-1)^{\log_3(y-1)}+1$.
5б	**a)** Докажите да $5*10=17$.
5б	**b)** Одредите неутрални елеменат закона „$*$”.
5б	**c)** Одредите $x\in M$ тако да $x*x*x=x*x$.

СУБЈЕКАТ III **(30 бодова)**

	1. Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{e^{2x}+x^4+2}$.
5б	**a)** Докажите да $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5б	**b)** Докажите да тангента на графику функције f у тачку абсцисе $x=0$, који се налази на графику функције f, је паралелна са дравом са једначином $x-\sqrt{3}y=0$.
5б	**c)** Докажите да функција f има јединствену тачку екстремума.
	2. Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+3}\right)$.
5б	**a)** Докажите да $\displaystyle\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\frac{\pi}{4}$.
5б	**b)** Докажите да било која примитивна F функције f је строго растуча.

5б **c)** Докажите да, за било који реални бројеви a и b, са $a<b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$, за било коју примитивну F функције f.