

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Adott a $z = 1 + i$ komplex szám. Mutassa ki, hogy $z^2 - z - i = -1$!
- 5p** 2. Határozza meg a legkisebb n természetes számot, amelyre az $x^2 - 3x + 3 - n = 0$ egyenletnek két különböző megoldása van a valós számok halmazában!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazában a $\log_5(25x) + \log_x 5 = 4$ egyenletet!
- 5p** 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott szám osztható legyen 2-vel vagy 3-mal!
- 5p** 5. Adott az $A(-1, 2)$, $B(4, 2)$ és $C(3, 0)$ pont az xOy derékszögű koordináta rendszerben. Számítsa ki az ABC háromszög területét!
- 5p** 6. Adott az $E(x) = \sin x - \sin(\pi - x) + \cos x + \cos(\pi - x) + \operatorname{tg} 2x$ kifejezés, amelyben $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
Igazolja, hogy $E\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$!

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(A + I_3) = 1$!
- 5p** b) Mutassa ki, hogy $A \cdot A \cdot A = O_3$!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy ha $X \in M_3(\mathbb{R})$, amelyre $A \cdot X = X \cdot A$, akkor léteznek az a , b és c valós számok úgy, hogy $X = aI_3 + bA + cA \cdot A$!
2. A valós számok halmazán értelmezett az $x * y = |x - y|$ művelet.
- 5p** a) Igazolja, hogy $(5 * 2) * 1 = 2$!
- 5p** b) Mutassa ki, hogy a „ $*$ ” művelet kommutatív!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $(a * b) + (b * c) \geq a * c$, bármely a , b és c valós szám esetén!

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{-(x-1)(x-3)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$!
- 5p** b) Határozza meg az f függvény monotonitási intervallumait!
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $x - 1 \leq 2e^{\frac{x-3}{2}}$, bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_0^2 f^2(x) dx = 4$!

5p b) Számítsa ki: $\int_0^1 \ln(f(x)) dx$.

5p c) Igazolja, hogy egyetlen olyan x valós szám létezik, $x \in [0, +\infty)$, amelyre $\int_0^x e^{f(t)} dt = 2021!$